ÀNGEL ALSINA y NÚRIA PLANAS

MATEMÁTICA INCLUSIVA

Propuestas para una educación matemática accesible



educación hoy estudios

narcea

Matemática Inclusiva

Propuestas para una educación matemática accesible

Àngel Alsina
Núria Planas

NARCEA, S. A. DE EDICIONES
MADRID

Avda. Dr. Federico Rubio y Galí, 9. 28039 Madrid. España
www.narceaediciones.es

Cubierta: Aderal

I.S.B.N.: 978-84-277-1603-2

A Mª Àngels Ll., Mercè S. y Maria Ll., por ser mis Max del Cuaderno de Bitácora.

À. ALSINA

A Manel, Bernat y Berta, por su generosidad. Y muy especialmente a mis compañeros del Grupo EMAC, por sus enseñanzas.

N. PLANAS

Índice

PRÓLOGO de Claudi Alsina i Català 9

INTRODUCCIÓN 11

1. EL PENSAMIENTO CRÍTICO 17

Actividades para la estimulación del pensamiento crítico 23

La actividad de los productos *light*. La actividad de El Pla de Sant Joan. La actividad de los envases de refresco. La actividad del plano de un piso.

El pensamiento crítico en la obra de Estalella 42

Por la línea del Pacífico. Pasarela compuesta. Los pozos de la casa de vecindad.

2. LA MANIPULACIÓN 49

Actividades con materiales manipulables 55

Operaciones con el *sorobán*. Descubrimiento de propiedades numéricas con las regletas. Composiciones y descomposiciones con el *tangram*. Proyecciones y secciones con cuerpos geométricos.

La manipulación de materiales en la obra de Estalella 74

Sumandos repetidos. Monedas diversamente ordenadas. Transformaciones de figuras recortadas. La geometría de los palillos. El tetraedro.

3. EL JUEGO 81

Actividades heurísticas con juegos 87

Juegos para practicar medidas. Juegos para practicar operaciones aritméticas. Juegos de estrategia para pensar.

El juego en la obra de Estalella 106

Curiosidades de algunos números. ¿Quién agotará la baraja? Adivinar cuatro números. Juegos de pesas.

4. LA ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD EN MATEMÁTICAS 113

Episodios para descubrir diversidades matemáticas 118

La diversidad de procedimientos algorítmicos. La diversidad de representaciones sobre las matemáticas. La diversidad en la resolución de problemas. La diversidad de significados atribuidos a símbolos matemáticos.

La diversidad en la obra de Estalella 135

Multiplicación rusa. Cuestiones de aritmética. Reparto de vino. El reino de Castilla. El tablero de ajedrez.

5. HACIA UN ENFOQUE INTEGRADO 143

Contextualizar y globalizar el entorno escolar 147

El papel del Trabajo por Proyectos. El papel del trabajo por competencias matemáticas.

EPÍLOGO 163

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 169

Prólogo

ESTA OBRA es un instrumento útil de trabajo para todo el profesorado preocupado por un aprendizaje de la matemática accesible a todo su alumnado. Intentaré aquí justificar la utilidad de este libro, basándome en diferentes factores.

En primer lugar, toda la labor personal de sus autores y sus colaboradores es la garantía inicial de que la obra es el resultado fundamentado en una serie de experiencias ya realizadas y contrastadas, en una temática donde los autores han hecho reconocidas aportaciones durante años.

En segundo lugar, la propia estructura de la obra, organizada en torno a cuatro capítulos: **pensamiento crítico, manipulación, juego** y **atención a la diversidad,** permite que en cada uno de ellos se encuentren actividades docentes factibles y muy bien explicadas y que, por el aval de su bondad didáctica, aseguran sin duda éxitos educativos. Las transcripciones que se nos ofrecen de las opiniones de alumnos frente a las actividades planteadas y el análisis didáctico que se hace en cada caso, muestran el enorme potencial formativo de muchas de las cuestiones planteadas.

Estas dos razones que acabo de comentar ya serían suficientes para transmitir el interés que para el profesorado puede tener esta obra como brújula para plantear actividades pedagógicamente ricas que en todos los casos se sitúan en unos marcos teóricos adecuados y actuales.

Pero leyendo el libro en diagonal e intentado extrapolar el mensaje último que los autores nos desean transmitir con su obra me atrevería a apuntar que nos están sugiriendo que ante los posibles problemas del aula para una **educación matemática accesible** tenemos ante nosotros multitud de recursos y argumentos para la mejora. En contraste con algunas publicaciones actuales

sobre el pesimismo docente, donde los problemas quedan muy claros pero las soluciones brillan por su ausencia, esta obra nos dice que desde los recursos y problemas de la vida cotidiana, desde el carácter lúdico y desde la experimentación, desde el diálogo y la crítica, desde el aprovechamiento de la riqueza intercultural, etc. tenemos a nuestra disposición un valioso tesoro para captar el interés y facilitar el aprendizaje efectivo de tantos niños y niñas que merecen vivir su encuentro con las matemáticas de forma divertida, reflexiva y estimulante.

Comparto con los autores una buena amistad y una admiración muy especial por Josep Estalella, tan citado a lo largo del libro. Mi madre fue alumna del Instituto Escuela y Josep Estalella fue su director. Durante años tuve ocasión de escuchar cómo mi madre hacía referencias elogiosas a la humanidad y al liderazgo de Estalella, a su inmensa capacidad de amor para dirigir un proyecto a partir de una relación entrañable con todo su alumnado. Más allá de las páginas del libro aflora también esta capacidad de sus autores para amar una bella profesión y sus bellísimos objetivos. Entiende pues la Matemática inclusiva no sólo como accesible o atractiva para todos sino también como la que seduce e invita a su conocimiento.

Deseo que los lectores de esta obra disfruten de ella, la usen para plantearse nuevos retos y se apunten, si todavía no lo están, al club de los educadores matemáticos innovadores y esperanzados.

CLAUDI ALSINA I CATALÀ
Universidad Politécnica de Cataluña

Introducción

«Para comprender el libro no es necesario tener saberes especializados. Fue escrito para todo el mundo que pueda y que quiera pensar, a quien no le dé miedo plantearse otra vez las preguntas infantiles: ¿Por qué eso es así? ¿Podría ser de otra manera?»

AGNES HELLER (1977: 8)

MATEMÁTICA INCLUSIVA. Propuestas para una educación matemática accesible surge de reflexiones iniciadas hace tiempo con el propósito de revisar, desde la contemporaneidad, principios clásicos. Somos conscientes de que hay muchos conocimientos necesarios para conseguir una educación matemática de calidad. Hemos escogido cuatro **—pensamiento crítico, manipulación, juego y atención a la diversidad—,** dando por supuesto que otros conocimientos fundamentales también merecerían haber sido considerados.

En primer lugar, debemos clarificar qué entendemos por **calidad.** Cuando se ha hablado de calidad en educación matemática se han querido sugerir ideas muy distintas, incluso opuestas. Muchas veces la calidad ha significado una cantidad relevante de buenos resultados escolares; otras veces se ha referido a la eficiencia de unos programas curriculares con unos grupos de alumnos. Aquí, examinamos la calidad desde otro punto de vista, mucho más cualitativo: una educación matemática de calidad es esencialmente aquella que sea accesible y comprensible para todo el mundo.

Desde un paradigma de la calidad centrado en la extensión y la comprensibilidad de la educación, afrontamos el reto de tratar en el siglo XXI principios basados en ideas clásicas. Nos guía el horizonte de una sociedad formada por personas capaces de pensar por sí mismas, de aprender disfrutando y de ser respetuosas con la diversidad. La falta de atención al pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad es un problema global de la educación matemática que traspasa las diferentes situaciones educativas locales. La reflexión en torno a los cuatro principios seleccionados tendría que ser prioritaria en cualquier sociedad y cultura, teniendo que hacerse en cada caso una interpretación suficientemente contextualizada.

Nuestro proyecto reivindica la importancia de conectar buenas prácticas del pasado con demandas del mundo educativo actual. Con esta finalidad, resulta útil recuperar la voz de Josep Estalella (1879-1938), científico y didacta cuyo pensamiento continúa siendo de gran vigencia, a pesar de que no siempre haya tenido la debida resonancia. A través del juego, las actividades recreativas, la experimentación, etc., Estalella consiguió despertar la curiosidad por los fenómenos matemáticos y físicos, impulsando la actividad investigadora. Partimos, pues, de su legado. Los fragmentos que siguen corresponden a los cuatro primeros capítulos del libro. Pretenden, respectivamente, que el lector pueda hacerse una idea del peso del pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la diversidad cultural en la educación matemática.

> *El pensamiento crítico:* «Vivir es vivir en un mundo lleno de contextos con problemas para entender y resolver. Aprender es aprender a vivir y, por lo tanto, aprender a entender y resolver problemas».
>
> *La manipulación:* «La acción de manipular, es decir, de operar con las manos, nos aporta conocimientos diversos. Todos nosotros hemos vivido experiencias sorprendentes, no esperadas, al tocar algún objeto con las manos: la dureza de un objeto, el peso, la rugosidad, el sonido que hace, el sabor que tiene, etc.».
>
> *El juego:* «Jugar es un tipo de actividad necesaria para el desarrollo integral de las personas y, desde esta perspectiva, es intrínsecamente humana, aunque no exclusiva de nuestra especie».
>
> *La atención a la diversidad:* «El conocimiento matemático, entendido como una tecnología en manos de unos grupos, de difícil acceso para otros, no deja espacio al pensamiento divergente, a las alternativas de interpretación ni al reconocimiento de las diferencias».

Hemos ordenado los capítulos de acuerdo con nuestra perspectiva global del libro. Cada lector, sin embargo, puede escoger el orden en que los leerá. A todos aquéllos que sean escépticos sobre la conveniencia de incluir alguno de los temas seleccionados, les recomendamos que empiecen la lectura por el capítulo correspondiente al tema. Dentro de cada capítulo, puede escogerse el orden que se considere oportuno. Finalizada la lectura, cada persona tendrá que ser finalmente quien lidere el planteamiento de cambios y mejoras en su propio conocimiento.

Los cuatro primeros capítulos se han estructurado del mismo modo:

- *Marco de referencia:* se introducen ideas clave, redactadas de manera que cualquier persona pueda tener una visión global de cada tema y de su peso específico en la educación matemática.
- *Ejemplos de actividades*: se recogen actividades comentadas y resueltas (situaciones próximas al ciudadano no experto en matemáticas), con la finalidad de ver propuestas de concreción de los temas tratados.

– *Comentario de actividades de Estalella*: se deja constancia escrita y gráfica (a través de imágenes antiguas) de la articulación de nuestro enfoque como visión contemporánea de una obra clásica.

Dentro de cada capítulo, es especialmente importante la sección dedicada al planteamiento y comentario de actividades donde la educación matemática se piensa desde la práctica. Queremos eludir el uso de conocimientos matemáticos que tradicionalmente han interesado más a los profesores que a los estudiantes y a la propia sociedad. A menudo, conocimientos como la trigonometría, el álgebra o la geometría analítica han servido para hablar sobre el grado de capacitación de las personas. No obstante, fuera del entorno escolar y del ámbito de profesiones específicas, estos conocimientos dicen muy poco sobre las capacidades reales de razonamiento y sobre el buen desarrollo de competencias.

Hemos escogido y, en la mayoría de los casos, diseñado actividades y situaciones problemáticas que, como mucho, necesitan la aplicación de conocimientos matemáticos básicos con el fin de ser entendidas e interpretadas. No son, sin embargo, actividades sencillas; requieren que el lector se enfrente a ciertas preguntas de manera creativa. Las preguntas no se refieren a situaciones conocidas y recurrentes, por lo que deben ir acompañadas de tiempos largos de reflexión y de contraste.

Escribimos el último capítulo, *Hacia un enfoque integrado*, con el objetivo de iniciar la elaboración de un modelo que incluya los principios educativos seleccionados. Si leemos cada capítulo como un texto aislado del resto del libro, corremos el peligro de comprender sólo en parte el mensaje que queremos transmitir. Hay libros específicos de manipulación, de juegos matemáticos, de educación y diversidad..., pero no hemos encontrado libros donde estos temas se traten de un modo integrado, en base a principios transversales a todos ellos como, por ejemplo, la contextualización, la globalización o la personalización.

Las páginas de este libro son un intento de contribuir a combatir un fenómeno que para muchos es parte inherente de nuestra sociedad. También son un intento de acercar la actividad matemática a las personas y a las necesidades de una sociedad crítica, solidaria y sostenible. A lo largo de estos años hemos comprobado que el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad son ejes de trabajo que facilitan la implicación de todas las personas en una educación matemática de calidad que ha de permitir relacionarse bajo principios de igualdad y respeto. Si queremos llegar a todas las personas y llegar con calidad, el pensamiento memorístico, la abstracción, la rutina y la homogeneización tienen que dosificarse y pasar a un segundo plano. El aprendizaje centrado en la rutina podría ser adecuado en un mundo que no estuviera sujeto a cambios, pero precisamente ésta no es una característica de nuestro mundo.

Decíamos que el enfoque de los capítulos retoma ideas clásicas. Hace muchos años, Estalella, junto con otros expertos en el arte de educar y divulgar el

conocimiento matemático, valoraron la resolución de problemas, la acción sobre los objetos o el juego como recursos clave para hacer su trabajo con eficacia. El tema de la diversidad cultural, sin embargo, no ha tenido históricamente la misma consideración. Los motivos son evidentes. Las posibilidades de movilidad de hoy han favorecido acercar realidades que antes eran lejanas y desconocidas para la mayoría de ciudadanos. Estos cambios requieren que la educación matemática tenga que ir más allá de las supuestas certezas sobre las cuales se han construido tradicionalmente los currículos escolares y los conocimientos de las personas.

El fracaso escolar, la urgencia de la atención a la diversidad, el analfabetismo silencioso, entre otras problemáticas, reclaman un proceso de reorganización de la educación matemática. A pesar de las valiosas aportaciones hechas por un amplio abanico de profesionales del mundo educativo, todavía falta calidad en la educación matemática actual. En las clases de matemáticas la actividad mecánica, repetitiva, el «hacer por hacer» acostumbra a ganar la batalla. Muchos educadores usan métodos centrados en la memorización por delante de la comprensión. Esto explica en parte que surjan generaciones poco motivadas para cuestionarse el porqué de los hechos matemáticos, con poca capacidad de análisis y de reflexión en su día a día.

En esta línea, un informe reciente, *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe* (2007), de un grupo de expertos dirigido por el ex primer ministro francés y actual eurodiputado Michel Rocard, asegura que los países de la Unión Europea tienen que modificar radicalmente sus métodos de enseñanza de las matemáticas y las ciencias. Urge optar por un enfoque más práctico, con el fin de invertir el creciente desinterés de los alumnos hacia estos estudios. El texto invita a hacer el paso de métodos deductivos hacia otros basados en la investigación y la experimentación, para el estímulo de las capacidades de observación, imaginación y razonamiento. Los expertos que firman el informe argumentan que si no se adoptan acciones más efectivas, la capacidad de Europa para innovar a largo plazo y la calidad de la investigación empezarán a decrecer.

Coincidimos plenamente con las conclusiones del anterior informe. Sin duda, la institución educativa ha de asumir nuevas responsabilidades, pero ha de hacerlo en sintonía con las familias y la sociedad en general. Por ello, conviene divulgar una nueva manera de enfocar la educación matemática a los expertos en pedagogía, a maestros y profesores, y al mismo tiempo acercarla a padres y madres, y a todas aquellas personas supuestamente alejadas del conocimiento matemático y científico. Ésta es una de nuestras pretensiones: acercar la educación matemática a cualquier lector, independientemente de su bagaje matemático y de su disposición inicial a implicarse en una lectura que le puede haber llegado de manera más o menos intencionada. Nos empuja una fuerte carga de ilusión y, sobre todo, la influencia de nuestros maestros, que no son exclusivamente nuestros, sino de todos: Dewey,

Freudhental, Makarenko, Montessori, Piaget, Puig Adam, Vygotski y tantos otros.

En este libro, no hay grandes teorías desarrolladas, no se recoge ningún compendio exhaustivo de estados de la cuestión, ni se usa un lenguaje técnico que limite la lectura a grupos concretos. Tampoco nos corresponde el trabajo de liderar planteamientos de cambios en el mundo de la educación matemática. Somos atrevidos en cuanto al grado de implicación del lector, pero no nos corresponden pretensiones relacionadas con agendas políticas y curriculares. Aun así, entendemos este libro como una manera de dar a conocer algunos de los retos que las diferentes agendas de los territorios tendrán que tener en cuenta.

Por otra parte, vamos con cuidado para no caer en la trampa de relacionar demasiado directamente la consecución de una educación matemática de calidad con el aprendizaje de las matemáticas o, aún más, con la construcción de una sociedad mejor. El aprendizaje de las matemáticas y el camino hacia una sociedad mejor dependen de muchos más aspectos. No obstante, este libro ha de contribuir en alguna medida al aprendizaje matemático del lector, quien habrá de asociar sus posibilidades de aprendizaje con las posibilidades de los otros. Mirar a los otros como interlocutores válidos, con posibilidades de aprender y oportunidades para hacerlo, ya es una manera de construir una sociedad mejor.

Este libro lo firmamos dos autores especializados en Didáctica de las Matemáticas. Pero el resultado final, que ha de ser de utilidad para todos los lectores, no es sólo el fruto de nuestro trabajo, sino de la labor diaria de muchos buenos maestros y profesores de matemáticas que nos han aportado experiencias brillantes. No reproducimos aquí los nombres de todos los profesionales, ya que la mayoría de ellos irán apareciendo en el libro a medida que se vayan presentando diversas actividades. Aún así, de forma genérica, queremos dejar constancia de nuestro agradecimiento a la Dirección General de Investigación de la Generalitat de Catalunya; la Red de Incentivación a la Investigación Educativa REMIC; la Fundación Jaume Bofill y la Fundación Propedagògic. Y a todos los profesores de matemáticas del Grupo EMAC (Educación Matemática Crítica); a todos los estudiantes que han colaborado con nosotros; a Josep Tarrés, por cedernos los derechos de imagen de las actividades de Estalella y por ser el verdadero impulsor de este libro. Sin sus ideas sobre la manera de divulgar la educación matemática, este libro no se hubiera iniciado. A Claudi Alsina, cuyos trabajos en nuestra área de conocimiento son fundamentales, por haber aceptado escribir el prólogo. Y, por supuesto, no podemos dejar de mencionar, de manera póstuma, al maestro Josep Estalella; no necesita muchos comentarios, pero que hace un siglo tuviese el convencimiento y la genialidad de comunicar una educación matemática crítica, manipulativa, lúdica y respetuosa con la diversidad, a través de su libro *Ciencia Recreativa*, dice mucho de este ilustre personaje.

Acabamos la Introducción retomando unas palabras de Estalella. En el prólogo de *Ciencia Recreativa* decía: «Dejad que los niños se aficionen en este libro, pues las frivolidades a veces han despertado latentes inteligencias y han revelado insospechadas aptitudes y vocaciones» (p. 1). Nos apropiamos de estas palabras y las hacemos extensivas a todas aquellas personas interesadas por la educación en general y por la educación matemática en particular. Si, como pensamos, la mejora de la educación matemática pasa por elaborar textos que se dirijan a buena parte de la sociedad y no sólo a los educadores matemáticos profesionales, la nuestra es una buena iniciativa. La educación matemática ha de entenderse cada vez más como un tema que requiere la colaboración de todo el mundo. Sin una socialización de la educación matemática, sin una co-responsabilización, será muy difícil mejorar las actuales prácticas.

1

El pensamiento crítico

«Conversación con un matemático: "l'esprit mathematique", explicado como la capacidad de ver en cada fenómeno la posibilidad de inversión. ¿Por qué se dice que "el vaso está encima de la mesa" y no que "la mesa está debajo del vaso"?».

PETER HANDKE (1981: 264)

VIVIR ES VIVIR en un mundo lleno de contextos con problemas para entender y resolver. Aprender es aprender a vivir y, por lo tanto, aprender a entender y resolver problemas. Desde la educación y, en particular, desde la educación matemática, la resolución de problemas viene fundamentándose desde hace tiempo. El modelo de resolución de problemas promueve el papel del ciudadano como investigador. Se identifica y representa el problema, se selecciona y aplica una estrategia y, finalmente, se valoran los resultados. Se trata, sin embargo, de un modelo donde se supone que alguien se ha encargado de formular previamente un enunciado con el problema, de manera que hay dos figuras relevantes, la del ciudadano que identifica el problema y la del ciudadano que se esfuerza por entenderlo y resolverlo. Cuando estas dos figuras coinciden, hablamos de un modelo de pensamiento crítico, que se puede ver como un caso particular de modelo de resolución de problemas. El pensamiento crítico, por tanto, requiere que quien quiere resolver un problema haya contribuido de algún modo a identificarlo.

Desde la filosofía, tal como apunta Edgar Morin (2000), la noción de pensamiento crítico es redundante. El pensamiento tiene que ser necesariamente crítico, de la misma manera que el agua siempre es húmeda. No obstante, desde una perspectiva más amplia tiene sentido hablar del pensamiento crítico como aquél que estimula la formulación de buenas preguntas y la búsqueda de respuestas complejas. Pensamos críticamente cuando cuestionamos la información que se nos proporciona, tomamos la iniciativa de buscar más información y desarrollamos un interés por ser precisos en el contraste de puntos de vista. Estas habilidades deben ponerse en práctica en los cuatro momentos comunicativos por excelencia: hablar, escuchar, leer y escribir. Pen-

sar críticamente es, en resumen, ser capaz de hablar, escuchar, leer y escribir críticamente.

La mayoría de problemas de la vida cotidiana son problemas todavía pendientes de definir que nosotros, como ciudadanos, tenemos que saber formular. Pintar una habitación, por ejemplo, nos lleva a tener que responder preguntas muy variadas: ¿qué cantidad de pintura hará falta?, ¿deben darse dos capas de pintura?, ¿deben repasarse sólo las partes en peor estado?, ¿debe pintarse la superficie de pared donde está previsto que vaya un armario?, etc. Nuestra experiencia en los mundos físico y social está llena de situaciones problemáticas que requieren el pensamiento crítico: ¿cuánto tiempo necesitamos si queremos llegar puntuales a una reunión?, ¿cómo podemos comprobar que en un juego de cubiertos no falta ninguno?, ¿qué semillas son más convenientes para un terreno? Cuando vamos a la tienda de semillas, el vendedor nos puede recordar que debemos escoger bien las semillas, en función del terreno y la época del año. Pero si no se nos hace esta observación, nosotros tenemos que ser capaces de plantearla para que las semillas germinen con éxito. En este caso, está en juego un huerto. En otras ocasiones puede estar en juego nuestra salud —¿cómo se tienen que distribuir las dosis de una medicina?—, la salud de muchos —¿cómo se puede reorganizar la jornada laboral para que haya tiempo de hacer deporte?—, la comprensión de cómo funciona el mundo —¿cómo se calcula el índice de desempleo en mi país?—, etc.

En los años ochenta, un estudio de John Goodlad (1984) alertó a las sociedades occidentales sobre el papel de la escuela en la educación de los alumnos. En su informe, en el que recogía datos de más de mil escuelas de enseñanza primaria y secundaria, Goodlad llegaba a la conclusión de que menos del 1% de los enunciados que se planteaban dentro de las aulas eran razonamientos. La mayoría de enunciados eran opiniones, tanto en discursos de los profesores como en discursos de los alumnos. Casi veinticinco años después, deberíamos preguntarnos cuál sería hoy el porcentaje de argumentos en una conversación de aula, o en otros entornos habituales para cualquier ciudadano: medios de comunicación, calles, mercados, reuniones familiares, reuniones de empresa, etc.

A finales de los años ochenta, el dato del 1% se usó como un impulso en los intentos de diseñar entornos de resolución de problemas que se habían empezado a implementar en algunas escuelas de Estados Unidos. En particular, el *National Council of Teachers of Mathematics* (1989) mencionó la necesidad de introducir variables de pensamiento crítico en los procesos de resolución de problemas. En el ámbito europeo, bajo la influencia de Goodlad, el Ministerio de Educación británico encargó un informe, elaborado por el equipo de Sylvia Downs (1987), sobre las características a promover en toda educación crítica. La UNESCO (1997a, 1997b) acabaría asumiendo las líneas de este informe. De acuerdo con el informe de Downs, por medio de la resolución crítica de problemas, el aprendiz debe:

– Responsabilizarse de su aprendizaje y adoptar un papel activo.
– Saber distinguir entre lo que tiene que memorizar y lo que tiene que comprender.
– Tomar decisiones y hacer preguntas para asegurarse de que comprende.
– Sentirse seguro con el fin de aprovechar nuevas oportunidades de aprendizaje.
– Darse cuenta de las dificultades que se le presentan y de las múltiples causas de estas dificultades.

El estudio de Goodlad y el posterior impacto del informe de Downs, llevan a una situación de opinión pública similar a la producida durante el movimiento de la *Escola Nova* en Cataluña, iniciado a finales del siglo XIX. Se cree en la fuerza de la educación como un motor social de progreso y al mismo tiempo se desconfía del papel de la escuela. La escuela de los años ochenta se ve como sospechosa de promover una enseñanza doctrinaria donde no se espera que los alumnos piensen en libertad. Durante los años de la *Escola Nova* ya se había insistido en la necesidad de emprender acciones pedagógicas que facilitaran el papel activo del alumnado en el desarrollo de razonamientos y en la toma de decisiones. Se quería romper la fuerte relación entre responsabilidad y obediencia, haciendo que el ciudadano responsable fuera un ciudadano libre con la razón como límite de la libertad. La *Escola Nova* estuvo influenciada por las directrices de la llamada Pedagogía Moderna en la que participó, entre otros, Josep Estalella.

Han pasado muchos años desde los movimientos de la *Escola Nova* y de la Pedagogía Moderna, pero estudios encargados por organizaciones como la OCDE —Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico— (2001, 2006), junto con otros promovidos desde ámbitos académicos (por ejemplo, Marchesi y Hernández, 2003), se han encargado de mantener vigente una cierta desconfianza en el papel de la escuela en cuanto a la articulación del pensamiento del alumno. Con todo, la OCDE mantiene una actitud optimista cuando se refiere al papel de la educación matemática en el intento de mejorar la autonomía intelectual de las personas. El informe que mencionábamos en la Introducción, *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe* (2007), es otro ejemplo de confianza en una «educación matemática crítica» (para más detalles sobre esta idea, ver Blázquez y otros, 2006; Figueras y otros, 2007; Planas y otros, 2008).

En 1994, el educador matemático y filósofo Ole Skovsmose, en su libro ya clásico *Philosophy of Critical Mathematics Education*, habla del pensamiento crítico en términos de experiencia transformadora que nos facilita una mejor comprensión de nuestro papel en el mundo. Las preguntas básicas del pensamiento crítico —¿qué está pasando?, ¿por qué está pasando?, ¿qué implicaciones tiene este hecho?, ¿con qué otros hechos está relacionado?, etc.— nos

implican en las situaciones que queremos explicar y conllevan un cierto grado de compromiso. Esta implicación no tiene viaje de retorno, nos cambia a nosotros y también al mundo que nos rodea. Adoptar un posicionamiento crítico ante una situación quiere decir perseverar en el intento de entender esta situación, aunque el esfuerzo sea exigente en cuanto al tiempo, los niveles de concentración y la dedicación personal.

No todas las experiencias de educación matemática pueden llamarse transformadoras. Hay prácticas que no necesitan del pensamiento crítico. Cuando un conductor, por ejemplo, deja siempre estacionado su coche en la misma plaza de aparcamiento del edificio donde vive, lleva a cabo una serie de actuaciones matemáticas con el fin de orientarse y aparcar su coche adecuadamente. Estas actuaciones son, en realidad, rutinarias, ya que la frecuencia de esta práctica ha hecho que se interiorizara hasta el punto de no tener que pensarla demasiado. Afortunadamente hay muchas prácticas que pueden ser interiorizadas, como aparcar un coche, subir unas escaleras o cerrar una puerta con llave. Nuestra vida quedaría del todo paralizada si no tuviéramos rutinas aprendidas y tuviéramos que pensarlo todo críticamente. El peligro radica en creer que toda práctica puede convertirse en rutina y que siempre hay una rutina adecuada para cualquier práctica.

Las prácticas matemáticas transformadoras son aquéllas que no admiten ser convertidas en rutinas o ser entendidas como una aplicación recurrente de rutinas. Se trata de prácticas que se inician desde la duda y las dificultades de comprensión. Son, por lo tanto, prácticas que de entrada generan más preguntas que respuestas. Lejos de estas prácticas, en muchas clases de matemáticas a menudo se pide aplicar procedimientos sin haber explicado los propósitos ni haber sido insertados estos procedimientos en un contexto más amplio de significados. Se trata de procedimientos que se introducen de forma desconectada de los procesos de pensamiento y de toma de decisiones de aquellos que los tendrán que aplicar. Hay una anécdota muy ilustrativa que la educadora Jean Anyon explicó recientemente en un seminario sobre pensamiento crítico y currículo. Años atrás, al asistir como observadora a una clase en Estados Unidos, había escuchado una conversación que tuvo muchas repercusiones en su obra posterior. A pesar de que no disponemos de la conversación literal, hacemos un esfuerzo por reproducirla:

Profesora: Coged la regla y colocadla en la parte de arriba. Haced una señal a cada número. Ahora colocadla en la parte de abajo y volved a hacer una señal a cada número. Después haced una línea.

Alumna: Tengo una idea de cómo hacerlo más rápidamente.

Profesora: No, no la tienes porque no os he dicho lo que estamos haciendo.

La profesora del ejemplo ha decidido «no explicar lo que se está haciendo», quizás como medida de control y contención de la información. Sin embargo, no parece que tener menos información haga sentir más segura a la alumna. Establecer relaciones entre la cantidad de información de que se dispone y la seguridad es arriesgado. Es probable que la profesora enfatice la parte rutinaria de la tarea para organizar más «ordenadamente» la sesión o para reducir de forma intencionada el nivel de exigencia a los alumnos. Su brusquedad en la respuesta no indica necesariamente una falta de implicación en la educación de los alumnos. No obstante, los alumnos, al menos una de ellos, parecen esperar algo más de la relación con la profesora, de la práctica en el aula y del objeto de su aprendizaje matemático.

La organización *Fundación para el Pensamiento Crítico*, en su web www.criticalthinking.org, caracteriza el perfil de un pensador crítico ejercitado. Los puntos que se destacan tienen gran similitud con los señalados en el informe de Downs. De acuerdo con la página web, un pensador crítico ejercitado:

- Formula problemas y preguntas vitales con claridad y precisión.
- Acumula y evalúa información relevante y usa ideas abstractas con el fin de interpretar esta información con eficacia.
- Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios relevantes; piensa con una mente abierta, reconoce y evalúa, según sea necesario, supuestos, implicaciones y consecuencias prácticas.
- Se comunica con eficacia a la hora de idear soluciones a problemas complejos.

Estas ideas se encuentran en gran medida en la obra de Anton Makarenko (1955), pedagogo de influencia en las teorías educativas actuales. Algunos aspectos de su teoría de la educación se mantienen vigentes a pesar de haber sido formulada durante la primera mitad del siglo XX. Los contextos histórico y social de este autor ruso lo llevaron a pensar en una teoría de la educación vinculada a la práctica y a las necesidades sociales del ciudadano de aquel momento. En su obra habla de construir el ciudadano crítico. El ciudadano individualizado y alienado, en palabras de Makarenko, tiene que dar paso a un ciudadano con capacidad de interpretación y de intervención. El ciudadano aislado, sin compromiso con el razonamiento y el entorno, surge de la falta de actuaciones hacia una educación crítica y de la organización efectiva de una educación basada en el aprendizaje de rutinas.

Makarenko entiende el pensamiento crítico como un proceso natural que debe recuperarse ante las influencias de una sociedad que no acostumbra a facilitar la indagación ni la exploración. La curiosidad por entender el porqué de diferentes situaciones es un proceso natural que aprendemos

desde pequeños y que a menudo dejamos de practicar aceptando las respuestas de los otros o perdiendo el interés por conocer las preguntas que llevan a ciertas respuestas. Aunque estas asunciones dejan poco margen al optimismo, el autor señala que las capacidades de indagación y de exploración son recuperables si se trabajan los estímulos adecuados en un entorno social favorable.

Un entorno social favorable ha de promover el intercambio de ideas y el establecimiento de conexiones entre ideas desde una perspectiva global. Dentro del ámbito escolar, la fragmentación en disciplinas dificulta una perspectiva global. En una clase de biología, por ejemplo, se explica el descenso de la pesca de merluza a partir de cambios en el ecosistema marítimo mediterráneo. En una clase de economía, el mismo problema se puede explicar a partir de los intereses del sector pesquero local. El problema se formula de manera diferente y recibe respuestas diferentes. Cuesta mucho encontrar ámbitos donde un mismo problema se mire desde enfoques complementarios y donde se admitan explicaciones interdisciplinarias. En general, el pensamiento crítico tiene que ver con ser capaz de establecer conexiones entre temas aparentemente diferentes e, incluso, ser capaz de hacer surgir temas no visibles con una primera mirada. Cuando nos dedicamos a pensar de manera profunda situaciones problemáticas, necesitamos analizar estas situaciones desde diferentes puntos de vista y en base a razonamientos de diferentes personas (Alsina, A. y Planas, N., 2007).

Una de las dificultades en el desarrollo del pensamiento crítico es la superación de las separaciones artificiales establecidas por la cultura entre multitud de temas. Una idea clave es aprender a relacionar, encontrar conexiones, a pesar de inercias que tiendan a separar. Skovsmose (1994) habla de aprender a construir significados complejos en base al establecimiento de relaciones entre significados más simples. Desde la lógica matemática, relacionar es construir similitudes y diferencias hasta el punto de agrupar y distinguir. Al enfrentarse a una situación problemática, el establecimiento de similitudes debe ayudar a identificar situaciones con circunstancias parecidas que permitan disponer de un marco de referencia para la interpretación. Por otra parte, el establecimiento de diferencias es un paso esencial con el fin de entender la unicidad de cualquier situación problemática y la necesidad de buscar particularidades.

Haber establecido conexiones entre situaciones problemáticas no nos lleva directamente a ser capaces de interpretar y dar respuestas a una situación particular. Sin embargo, estamos ante un primer paso en la activación del pensamiento crítico. El resto de estímulos necesarios dependen de muchos factores, pero en general requieren la participación y el intercambio con los otros. El apartado siguiente habla de la construcción de espacios favorables para la participación y el intercambio en situaciones de resolución de problemas.

ACTIVIDADES PARA LA ESTIMULACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Hemos mencionado características del pensador crítico que ayudan a reconocerlo. Ahora hablamos de cómo facilitar socialmente la construcción progresiva de estas características. La reflexión individual es un buen punto de partida para la formulación de preguntas y la construcción de argumentos. No obstante, con el fin de profundizar preguntas y argumentos, conviene el apoyo del trabajo con los demás. Es más fácil repensar preguntas y reconstruir razonamientos en una situación de interacción que en solitario. Naturalmente hay que establecer antes normas básicas de relación como, por ejemplo, estar dispuesto a escuchar las ideas de los otros y respetarlas, incluso cuando las queramos rebatir o no nos parezcan adecuadas. También hay que elaborar contra-argumentos ante argumentos con los que no estamos de acuerdo, rehuyendo respuestas simples basadas en valoraciones a las personas y las prácticas.

Reanudando la idea de trabajo en grupo, podemos decir que el desarrollo del pensamiento crítico está vinculado con la capacidad de participar en «comunidades de pensamiento crítico». De acuerdo con los sociólogos Ramón Flecha y Lídia Puigvert (2002), una comunidad es un espacio de interacción con prácticas compartidas que vienen facilitadas por normas sociales de respeto al pensamiento de los demás. Estas normas son básicamente de tipo actitudinal: saber escuchar, tomar en consideración puntos de vista alternativos a los propios, tener interés por integrar ideas presentadas por separado, etc. En el caso de «comunidades de pensamiento crítico», hay prácticas compartidas referidas al pensamiento crítico.

Una comunidad de pensamiento crítico es diferente de un entorno de instrucción. Este último se caracteriza porque una de las personas tiene un papel específico de instructor —quien enseña—. Es el caso de muchas aulas donde el profesor se distancia de los alumnos —quienes aprenden— y se ubica fuera de una posible comunidad (Planas, 2006), o de muchos otros contextos no escolares donde hay una persona a quien se le supone un principio de autoridad que acaba limitando la aparición de propuestas de pensamiento alternativas. Para la promoción del pensamiento crítico hay que tender a fomentar grupos donde no se le suponga todo el conocimiento a ninguno de los miembros o, cuando menos, donde todo el mundo esté dispuesto a considerar a los demás como interlocutores válidos. En definitiva, es necesario desprenderse de la idea de que alguien puede enseñar mucho porque los demás no saben nada.

Un pensador crítico ejercitado hará todo lo posible para que las personas con quienes se comunica también se comporten de forma crítica. Cuando alguien cree que no hay pensamientos alternativos, difícilmente se comunicará con los otros con el respeto necesario ni tendrá interés en cuestionar sus propios razonamientos. Nadie tiene todas las respuestas ni tampoco nadie es

capaz de formular de manera individual todas las preguntas que tienen que permitir entender una cierta situación problemática. Hay gente con más habilidad para pensar de manera reflexiva y buscar criterios de objetividad, pero incluso esta gente puede obviar aspectos importantes que le impidan avanzar y que otra persona puede haber captado con más facilidad. Podemos decir que se aprende a pensar críticamente por contacto y contraste con el pensamiento de los demás.

En 2005, con el propósito de acercarnos al ideal de pensamiento crítico, un grupo de educadores matemáticos constituyó el Grupo de Trabajo EMAC, «Educación Matemática Crítica»[1]. Desde entonces, el Grupo ha avanzado en la construcción de otro ideal, el de comunidad. Después de comprobar, año tras año, las dificultades de los alumnos para formular preguntas, pensar de manera reflexiva y tomar parte activa en su aprendizaje, decidimos trabajar en el diseño de experiencias para la estimulación del pensamiento crítico. El Grupo se ha centrado en la elaboración e implementación de actividades «críticas». Son actividades que admiten ser planteadas en más de un nivel de la enseñanza obligatoria, que pretenden favorecer la participación de todo el alumnado y que son abiertas desde la perspectiva de las posibles estrategias de aproximación y resolución.

Es importante reconocer que no se aprende a pensar críticamente en abstracto. Por ello, más allá de las consideraciones sobre el pensamiento crítico hechas en el marco del Grupo EMAC y dadas las finalidades prácticas del Grupo, se han diseñado actividades concretas. Con todo, buscar temas para el trabajo de una matemática crítica no es fácil. Los temas han de favorecer el interés y el compromiso suficientes con el fin de plantear buenas preguntas ante situaciones problemáticas. Hasta el momento, para la estimulación del pensamiento crítico, hemos seleccionado algunos temas para el diseño de actividades: productos alimentarios *light,* planos urbanísticos en municipios del territorio, formas de envases de un refresco popular, ventajas e inconvenientes de un piso, etc. Cada tema ha conllevado la elaboración de más de una actividad. Disponemos, por ejemplo, de una secuencia de actividades de pensamiento crítico sobre pisos y planos (Darnaculleta, Esteve y Planas, 2008).

El trabajo de las actividades que proponemos a continuación es una manera de completar nuestra caracterización de pensamiento crítico y, al mismo tiempo, un estímulo para su práctica. Plutarco, el filósofo clásico, decía que el pensamiento no es un vaso que hay que llenar sino un foco que hay que encender. Pensar cada una de las actividades es una manera de contribuir a encender este foco o, en muchos casos, a mantenerlo encendido.

[1] F. Blázquez, A. Darnaculleta, S. Esteve, R. Figueras, J. C. Franquet, A. Miguel, N. Planas y T. Oriol son miembros del Grupo EMAC, «Educación Matemática Crítica». El Grupo, adscrito a la Associació de Mestres de Rosa Sensat, ha sido financiado recientemente por la Fundación Jaume Bofill y la Fundación Propedagògic.

La actividad de los productos *light*[2]

➡ ¿Cuándo decimos que un producto es *light*?



Figura 1.1. *Ejemplos de productos* light *y no* light

Después de haber pensado más de un minuto...

La reglamentación actual en España establece que para poder poner la etiqueta *light* en un producto debe tener como mínimo un 30% menos de calorías que el mismo producto en su versión estándar. La reducción energética se consigue disminuyendo o sustituyendo la cantidad de azúcares y/o grasas por componentes menos calóricos. Aunque el término *light* es de uso muy frecuente, no es habitual conocer su reglamentación. El propósito de la actividad es inferir la definición de producto *light* a partir de datos contenidos en envases de productos *light* y no *light*. Es necesario, pues, disponer de algunos envases. Si se está en una clase, se puede pedir al alumnado que traiga productos de ambos tipos.

[2] La idea de la actividad fue introducida por la profesora Raquel Figueras (Escola Montessori Palau, Girona) en el marco del Grupo EMAC.

Esta actividad posibilita usar el conocimiento matemático en el contexto donde vivimos. Con el fin de comprobar la riqueza de la actividad, hemos recogido información sobre razonamientos construidos en conversaciones y trabajos de aula. A pesar de la precipitación inicial para dar respuestas, obviando los datos contenidos en los materiales, y a emitir opiniones poco elaboradas basadas en creencias previas, hay un progreso hacia la elaboración de argumentos complejos. El Cuadro 1.1. recoge opiniones de alumnos antes de que se hayan tomado el tiempo necesario para la reflexión. Más tarde, se buscan datos en los materiales y en los ordenadores de aula. El paso de las opiniones a los argumentos, con el intercambio de lo que se piensa por delante de lo que se opina, es decisivo en la construcción del pensamiento crítico.

«Un producto es *light* si es más caro que el no *light*».

«Los productos *light* en realidad no lo son porque no es verdad que adelgacen: si consumes mucho *light* al final puedes tener sorpresas».

«Decimos que un producto es *light* cuando es de dieta y va mejor para la salud».

«Un producto *light* es como uno desnatado o un bajo en calorías, sin edulcorantes ni aditivos porque es más sano».

«Los *light* son los que tienen más información en el envase porque los compra la gente que quiere saber más de eso de la comida».

«Los productos *light* engordan menos y son más saludables».

«Los *light* se hacen con alimentos sintéticos, como los edulcorantes y los colorantes; el aspartamo es de los más conocidos porque está en un famoso refresco».

«*Light* está en inglés y quiere decir más ligero, que no pesa tanto en el estómago».

«Los *light* son los que tienen más conservantes para suplir la falta de grasas».

«Los productos *light* son los que tienen sabor de plástico».

«Los *light* son los que yo ya no compro directamente».

«No es necesario comprar *light* porque si haces deporte gastas todas las calorías que te ahorras comiendo *light*; además, te ahorras dinero porque los *light* son más caros».

Cuadro 1.1. *Ejemplos de opiniones de los alumnos**

La lluvia de opiniones es un buen inicio. Cualquiera de nosotros podría haber dado respuestas similares. En el caso del aula, muchos alumnos consideran suficientes las opiniones y dan por resuelta la actividad. Las opiniones iniciales y la poca atención hacia los materiales dificultan la comprensión del término *light*. Se debe insistir en la necesidad de profundizar más en el tema. Con el fin de motivar la exploración en profundidad, se formulan nuevas pre-

* En todo el libro, los textos de alumnos son transcripciones traducidas literalmente del catalán.

guntas: ¿por qué hay productos *light* donde la etiqueta sólo pone bajo en calorías?, ¿son en realidad *light* los productos de este tipo?, etc. También conviene estimular la proximidad con los materiales para poder obtener información relevante. Después del trabajo colaborativo y con material, se llegan a desarrollar argumentos narrativos claros y precisos. Por ejemplo, se argumenta que al asociar los productos *light* con el hecho de engordar menos o no engordar, el significado de *light* se asocia a la composición nutricional del producto y, en particular, al porcentaje de grasas. Incluso se rechaza la distinción entre grasas y calorías porque se considera que contradice opiniones previas. El Cuadro 1.2. recoge algunos argumentos.

«Con el objeto de saber por qué un producto es *light* se tiene que comparar con el original, por eso no es extraño que haya horchatas y patatas fritas *light*».

«Ser *light* tiene que ver con el valor energético, y eso es diferente de las grasas y de las proteínas porque algunos productos *light* tienen más grasas y proteínas que los normales».

«Hay *light* con más del 30% de calorías, se ve en algunos envases. Hay productos más *light* que otros, donde el porcentaje tiene que ser muy alto porque hay un 0% de calorías».

«La mozzarella *light* tiene menos grasas y menos kilocalorías, pero los mismos hidratos y más proteínas; eso quiere decir que ser *light* no es tener menos de todo».

«En los envases de algunos quesos *light* hablan mucho de la grasa, pero en otros envases hablan de las calorías. La definición tiene que ser la misma pero no todos quieren destacar lo mismo».

«En algunos envases se indica que hay un 40% menos calorías o que hay un 30% menos, pero se tiene que calcular si eso es cierto».

«Cuando ya sabemos que por lo menos tienen un 30% menos de calorías, lo que interesa es darse cuenta de cómo se cambian los otros componentes nutricionales para conseguir la reducción de calorías; se ve que no sólo cambian las grasas».

«Si ser *light* tiene que ver con las calorías y las calorías son una cosa diferente a las grasas, entonces ser *light* no tiene que ver con adelgazar».

Cuadro 1.2. *Ejemplos de argumentos de los alumnos*

El Cuadro 1.3. muestra el procedimiento seguido por un grupo de alumnos que busca información en Internet y encuentra rápidamente la definición de *light*. La actividad de inferir la definición se sustituye por una de comprobación en un caso en el que no se cumple el porcentaje mínimo esperado debido a los factores de equivalencia aplicados entre las unidades de kilocaloría y kilojulio. El grupo se da cuenta de que el envase de las patatas fritas no está etiquetado en castellano y sospecha que el término *light* se está aplicando bajo una normativa diferente a la española. El debate sobre la falta de homogenei-

zación de normativas dentro de la Comunidad Europea lleva a buscar otros productos que se puedan haber comprado fuera de España. Más tarde, surgen dificultades derivadas de la confusión entre grasas, calorías y azúcares, que erróneamente se tratan como sinónimos. Esta confusión retrasa la identificación de las calorías como concepto clave en la definición de *light*.

Patatas fritas normales (100g)	**Patatas *light* (100g)**
Valor energético: 556kcal / 2317kj Proteínas: 4,3g Glúcidos: 48g Azúcares: 1,8g Grasas: 38g Grasas saturadas: 13g Fibras alimentarias: 3,0g Sodio: 0,53g	Valor energético: 490kcal / 2051kj Proteínas: 5,0g Glúcidos: 60g Azúcares: 2,1g Grasas: 25g Grasas saturadas: 9,0g Fibras alimentarias: 3,8g Sodio: 0,50g (500g)
556kcal – 490kcal = 66kcal; 556 —>100%, 66 —>? 6600/556 = 11,87% menos de valor energético. Debe revisarse la definición de Internet. 2317kj – 2051kj = 266kj; 2317 —>100%, 266 —>? 26600/2317 = 11,48% menos de valor energético. Debería haber dado 11,87%.	

Cuadro 1.3. *Precisión de parte de un argumento*

El Cuadro 1.4 contiene parte del informe escrito elaborado por el grupo anterior. La elaboración de informes escritos es una manera de forzar la síntesis de todo el procedimiento del análisis llevado a cabo. El análisis y la síntesis son fases del trabajo complementarias que no pueden separarse. Si no se es capaz de decidir cuáles son los argumentos principales y cómo tienen que redactarse de manera que queden conectados, hay que revisar el análisis. A menudo una de las dificultades al hacer síntesis es que el análisis realizado es, en realidad, una acumulación desorganizada de argumentos. No es suficiente elaborar argumentos y comunicarlos, también debe estudiarse cómo encajan entre ellos.

En el caso del grupo que nos sirve de ejemplo, el informe escrito completo pone de relieve las dificultades de sintetizar el análisis. A pesar de la abundancia de argumentos, la revisión de alternativas y la iniciativa en la formulación de preguntas, la síntesis se convierte en una acumulación de la información obtenida. De todas formas, el proceso seguido desde las opiniones iniciales hasta la elaboración del informe puede entenderse como un trabajo de pensamiento crítico. Hay decisiones importantes que ponen de manifiesto este trabajo. Por ejemplo, el grupo reconoce que, en la definición de *light*, pueden estar interviniendo variables a las que no se ha tenido acceso. De aquí

que se establezca la distinción entre definir la noción de producto *light* en base a lo que se ha conseguido saber y en base a lo que es.

«Según la información que hemos buscado en Internet, se define un producto *light* como aquél en el que la aportación energética es al menos un 30% más baja que en el alimento de referencia. Se tiene que ver si eso se cumple porque no está claro si es una normativa o una recomendación».

«(…) hemos llegado a saber lo que hemos encontrado en Internet y lo que dicen los envases. Además, queremos saber si los productos *light* se quedan cerca del 30% o si superan en mucho este porcentaje. Esta pregunta no está en el problema que nos han dado, pero con el grupo hemos decidido que también nos interesa. Hemos tenido que escoger porque había muchas cosas para buscar».

«Para ver si se cumple eso del 30% debemos escoger bien los productos. Hay grupos que han elegido bebidas pero nosotros creemos que es mejor trabajar con un alimento. A las bebidas *light* les faltan demasiado componentes nutricionales. Nosotros nos hemos sorprendido con las patatas fritas, que deben seguir una normativa no española».

«Estaría bien ver el porcentaje de reducción de calorías en los productos que son bajos en calorías. Podemos coger algunos dulces o patés; en su envase dice "bajo en calorías". Si eso del 30% fuera sólo una recomendación, las empresas pondrían *light* porque vende más».

Cuadro 1.4. *Ejemplo de parte de un informe*

La actividad de El Pla de Sant Joan[3]

La Palma de Cervelló es un pueblo cercano a Barcelona de 5 km^2 de extensión, con 3.000 habitantes y un 30% de la población menor de 18 años. El Pla de Sant Joan es un terreno del pueblo rodeado de zonas boscosas donde se quiere llevar a cabo un proyecto urbanístico de 1.500 viviendas.

➜ **¿Qué pensáis de la siguiente noticia?**

> «A pesar de que el índice de participación ha sido muy bajo (sólo un 6,1%), más de la mitad de las personas que han respondido la encuesta sobre el Proyecto de Recuperación de El Pla de Sant Joan estaría de acuerdo con la propuesta que promueve la Asociación. Concretamente, el 56% considera que desarrollar El Pla de Sant Joan de una manera ordenada y sostenible sería beneficioso para el municipio».

[3] La idea de la actividad fue introducida por el profesor Antonio Miguel (IES Gelida, Barcelona) en el marco del Grupo EMAC.

Después de haber pensado más de un minuto...

En el proceso de promoción del pensamiento crítico, una dificultad es saber decidir la cantidad adecuada de información que ha de proporcionarse. Un exceso de información puede condicionar demasiado la construcción de conocimiento y puede acabar llevando a una mera reproducción de conocimiento construido por otros. Por el contrario, un déficit de información puede llegar a obstruir el propio proceso de exploración. El equilibrio entre cantidad de información y construcción de conocimiento es una cuestión a tener en cuenta en todas las actividades que ejemplificamos. En el caso del problema de El Pla de Sant Joan, al contenido de una noticia de prensa se añade información sobre características del pueblo donde se sitúa la cuestión problemática a resolver.

La actividad se ha llevado a cabo en un aula donde los alumnos no están familiarizados con enunciados sin una pregunta bien definida y donde La Palma de Cervelló queda geográficamente lejos. Se espera que una pregunta abierta permita a cada uno expresarse según sus posibilidades. No obstante, muchos alumnos piden pautas de actuación y empiezan expresando opiniones poco elaboradas. El Cuadro 1.5. recoge algunas opiniones que no derivan

«Barcelona está muy lejos. ¡Esto no tiene nada que ver con nosotros!».

«Parece que hayan votado muchos más».

«Los comercios estarán contentos porque ganarán mucho dinero».

«No me cuadran los datos que tengo con el titular de la noticia».

«Ocultan datos. No es un engaño pero no hay toda la verdad».

«A algunos les puede salir a cuenta y puede ser beneficioso para el pueblo».

«No son suficientes viviendas para la gente mayor de edad».

«Si la mayoría de gente mayor de edad está de acuerdo, está todo decidido».

«No se puede saber si más de la mitad de habitantes está de acuerdo porque no los han encuestado a todos».

«La construcción de las viviendas es igual a la mitad del pueblo».

«Con un plan de viviendas ordenado y sostenible, el pueblo estará mejor».

«El tanto por ciento no refleja la opinión de todos».

«Es un porcentaje muy bajo, tendrían que volver a hacer la encuesta».

«Se tendría que cambiar la noticia, el periodista se ha equivocado».

«Creo que la Asociación quiere hacer una mejora pero engaña al pueblo diciendo que más de la mitad lo quiere cuando sólo ha votado un 6,1%».

Cuadro 1.5. *Ejemplos de opiniones de los alumnos*

en la formulación de argumentos. Decíamos antes que la lluvia de opiniones es un buen inicio. Aún así, en algunas ocasiones la abundancia de opiniones puede generar un cierto bloqueo si se confunden opiniones y argumentos. En esta clase algunos alumnos preguntan cuál es la opinión «correcta» desde el supuesto que la tarea matemática propuesta es una simple cuestión de contraste de opiniones. Incluso el alumno que sugiere la posibilidad de que el periodista se haya equivocado al redactar la noticia, no concreta cuál es el error que le supone.

Otras opiniones evolucionan hacia argumentaciones complejas cuando se explica que la dimensión social del tema requiere una exploración más profunda. Aún así, cuesta mucho emprender el estudio de qué datos se están usando y de cómo se usan en la noticia de prensa. Durante el trabajo en pequeños grupos, algunos alumnos hacen cálculos para saber cuánta gente ha respondido la encuesta. Otros, sin embargo, no llegan a implicarse, aunque se les recuerda un debate anterior sobre el paso de las líneas de la MAT (Muy Alta Tensión) donde tuvo lugar una discusión parecida. El profesor plantea preguntas (¿es cierto que la mitad de los habitantes están de acuerdo con este proyecto urbanístico?, ¿creéis que esta Asociación quiere mejorar el pueblo?, etc.), que conllevan reacciones de indignación con el comportamiento de la Asociación y la supuesta manipulación informativa. Para algunos alumnos, la experiencia de indignación es un primer paso en la articulación de razonamientos.

Hay alumnos que hablan de los porcentajes y las votaciones de una manera estimativa, sin comparaciones numéricas. Otros expresan satisfacción por el proyecto, aunque se dan cuenta de que la urbanización será mayor que el pueblo y que habrá una pérdida sustancial de bosques. De entre éstos, hay quienes usan la calculadora para entender qué quiere decir el 56% de los habitantes y deducir si la votación refleja una parte significativa de la población total. Calculan el 56% de 3.000 habitantes pero no saben explicar por qué lo hacen. La falta de reflexión razonada es una constante al iniciar las discusiones. Se empiezan tareas de cálculo que después no se saben justificar. Se calculan cuántas personas han respondido la encuesta y cuántas están de acuerdo. Cuando se introducen nuevos elementos de discusión sobre los porcentajes y su interpretación en el texto, los alumnos que sólo habían hecho cálculos relacionan informaciones diversas sin llegar a organizar conclusiones. Destaca el caso de una alumna académicamente brillante que rellena dos hojas de cálculos pero dice no haber tenido tiempo de concluir ni pensar en una respuesta. Salvo algunas excepciones, se expresan ideas poco claras y se muestran señales de no haber entendido bien la noticia.

Un grupo de alumnos destaca el uso de ciertas palabras en la descripción de la noticia. Por ejemplo, dicen que no es igual usar la expresión «estaría de acuerdo con» que «está de acuerdo con». Estas apreciaciones son muy intere-

«1.500 viviendas como mínimo son 3.000 personas. Es importante llegar a saber la densidad final del pueblo si finalmente El Pla prospera. La comparación de las dos densidades, la de ahora y la que se puede llegar a alcanzar, da más idea de los cambios en el pueblo que la diferencia entre la cantidad de gente».

«La densidad del pueblo es 600 h/km^2, 1.500 viviendas más es una barbaridad. Creemos que ahora las 3.000 personas que viven en 5 km^2 tienen buena calidad de vida. Eso son 600 personas por cada km^2. Con los cálculos que hemos hecho nos salen 6 personas por cada 10.000 m^2. Eso parece mucho pero no es tanto si pensamos que buena parte de esta extensión son bosques que deben preservarse».

«En la noticia, tendrían que decir el 56% de los habitantes que han respondido la encuesta. Si empezamos a hacer cálculos, vemos que en realidad no llega ni a 100 personas las que han respondido que sí. Nos hemos quedado con un 70% de la población porque se supone que los otros todavía no pueden votar. Después, de éstos hemos cogido el 6,1% y de lo que nos ha dado hemos hecho el 56%».

«Nosotros hemos intentado imaginarnos cuánto ocupan 5 km^2. Hemos ido al ordenador a buscar la extensión de la ciudad de Barcelona. Nos ha costado mucho encontrar este dato. Después hemos visto que saber la extensión de Barcelona no nos ayuda porque no se puede comparar un pueblo pequeño con una gran ciudad. Son circunstancias demasiado diferentes. Ahora estábamos pensando en un pueblo que conozcamos para poder comparar con La Palma de Cervelló».

«Primero hemos pensado que los periodistas nos querían engañar pero después nos hemos fijado bien en cómo estaba redactada la noticia. No se asegura nada, se dice "estaría de acuerdo" y no "está de acuerdo". El tiempo verbal indica cosas diferentes».

Cuadro 1.6. *Ejemplos de argumentos de los alumnos*

santes puesto que ser capaz de discutir los usos de las palabras tiene que ver con saber argumentar. También se observan buenas relaciones personales cuando se establecen mecanismos de valoración de procesos y resultados. Si los resultados no son los esperados, no se atribuyen las causas a los compañeros, sino que se incide en los procesos, argumentando que se debe pensar más. Los esfuerzos de los grupos se reconducen hacia procesos concretos, sin pretender abarcar toda la situación problemática. A lo largo de las conversaciones, se evitan las descalificaciones y se parte de una actitud constructiva. El informe del Cuadro 1.7. muestra argumentos de un grupo con un enfoque basado en la interpretación personalizada de la noticia. Esta interpretación difiere de la sugerida por la noticia donde el proyecto urbanístico se presenta como un beneficio para el pueblo. En el informe sólo se documentan argumentos consensuados dentro del grupo.

A través del trabajo de este tipo de actividades se facilita la interacción, la verbalización, la argumentación y la especulación de ideas. La resolución de

actividades alejadas de la vida real es otra manera de estimular estas competencias, que son todas ellas condiciones para el pensamiento crítico. Conviene, sin embargo, recurrir con frecuencia al aprendizaje basado en problemas con una significatividad real para las personas. El pensamiento crítico tiene pleno sentido en situaciones conectadas con la vida real. A menudo son situaciones que implican la toma de decisiones en base a poca información. En muchas ocasiones, no hay una persona que conozca la solución más adecuada. La falta de una figura que sepa la solución ayuda a buscar soluciones desde diferentes puntos de vista, el análisis crítico de las decisiones de los demás y el desarrollo de alternativas.

«No hemos visto nunca este pueblo pero nos lo podemos imaginar. Hay un 70% de gente que puede votar, y de éstos hay un 6,1% que han respondido a la encuesta, y de éstos hay un 56% que han dicho que estarían de acuerdo con el Pla de Sant Joan. Hemos hecho varios cálculos y nos sale que han votado afirmativamente un poco más de 71 personas. Eso es muy poco porque en el pueblo viven 3.000 personas. Si hacemos el porcentaje real, obtenemos que han votado afirmativamente un 2,3% de la población».

«La manera como está redactada la noticia nos hace pensar que las preguntas de la encuesta estaban escritas con un poco de mala intención. Se tendrían que ver las preguntas para saber a qué ha contestado la gente realmente. Nos extraña mucho que la gente quiera un desastre urbanístico para su pueblo, pero siempre hay gente de todo tipo».

«Para saber si tenía sentido que fuera a vivir tanta gente a La Palma de Cervelló, hemos calculado la densidad actual. Nos ha salido que la densidad del pueblo ya es altísima, 600 h/km^2. 1.500 habitantes más es una barbaridad. Hemos intentado imaginarnos qué barrios de Barcelona tienen esta densidad y seguramente todos la superan porque hay edificios muy altos. Pero aquí estamos hablando de un pueblo donde se supone que la densidad no se tiene que comparar a la de una ciudad».

Cuadro 1.7. *Ejemplo de parte de un informe*

Se aprende más fácilmente cuando se exploran situaciones cotidianas. Por otra parte, el aprendizaje es más estimulante cuando se plantean interrogantes que requieren esfuerzo intelectual por delante de la mera repetición de rutinas. También hay más estímulo cuando no se ofrece la información completa ni organizada, de manera que se deben saber identificar, encontrar y utilizar los datos necesarios. En el caso de El Pla de Sant Joan, se debe analizar un escenario social complejo, caracterizado por la falta de ordenación urbanística y las condiciones de financiación de los ayuntamientos, entre otros temas. Al mismo tiempo, se debe saber reconocer lo que se sabe y lo que no en relación a este escenario y a las circunstancias del pueblo.

La actividad de los envases de refresco[4]

➡ **Piensa los motivos del nuevo formato de las latas de un refresco de 33 cl.**



Figura 1.2. *Material proporcionado junto con el enunciado*

Después de haber pensado más de un minuto...

La actividad se basa en la comparación de dos tipos de envases para un refresco. Se trabaja la capacidad de «saber mirar» objetos cotidianos desde la indagación de aspectos desconocidos de estos objetos. Después de la familiarización con el enunciado, debe decidirse cómo se organiza el proceso de resolución, teniendo en cuenta la información visual y verbal del enunciado. A diferencia del problema de El Pla de Sant Joan, ahora el enunciado es muy breve y tiene un alto componente de visualización al referirse a la comparación de dos figuras con volumen. El proceso de personalización está garantizado ya que se trata de un refresco muy popular, asociado a una multinacional de gran influencia en nuestra sociedad actual.

Disponemos de resultados de la actividad en un aula donde se organiza el trabajo en pequeños grupos. Ya hemos comentado que la capacidad de pen-

[4] La idea de la actividad fue introducida por los profesores Anna Darnaculleta (IES Ramón Casas i Carbó, Barcelona), Raquel Figueras (Escola Montessori Palau, Girona) y Antonio Miguel (IES Gelida, Barcelona) en el marco del Grupo EMAC.

samiento crítico se refuerza en colaboración con los demás. El trabajo en pequeños grupos debe provocar que los alumnos colaboren entre ellos, que tengan curiosidad por saber las causas del nuevo formato y que se muestren dispuestos a manipular y experimentar con el material. El objetivo no es saber qué grupo tiene más razón sino explicar de cuántas maneras diferentes se profundiza en el conocimiento de la situación planteada. Muchos alumnos empiezan a buscar los motivos del nuevo formato explorando diferencias entre los envases, prestando especial atención al texto y a la forma. A pesar de tener claro que no se les pide un listado de diferencias, se familiarizan con el problema por esta vía. El Cuadro 1.8. recoge opiniones surgidas durante la manipulación de los envases.

«La lata típica de este refresco es de importación y la otra no».

«En la nueva lata han eliminado la promoción de regalos y con eso se ahorran mucho dinero».

«Los años de fabricación son diferentes».

«La lata alargada no lleva código de barras, no se puede vender en cualquier lugar porque en un supermercado se necesitaría el código de barras».

«Las letras que indican la marca son de diferente tamaño».

«Los logotipos no son exactamente iguales porque no se mantienen las proporciones».

«Una lata tiene unos números que pueden ser la fecha de caducidad de la bebida y la otra lata no tiene ningún número en la parte inferior».

«El nuevo envase es más cómodo de transportar».

«El formato alargado hace la competencia a otra marca».

«Para la distribución de las letras se han utilizado columnas de diferente tamaño».

«Los dos rojos de las latas no tienen la misma intensidad».

«La parte de encima de las latas, cuando se estrechan un poco, es diferente. La lata más alta no se estrecha tanto ni tampoco hay tanta diferencia entre el grosor de la tapa y el de todo el cilindro».

«La novedad del formato es una estrategia para aumentar el precio».

Cuadro 1.8. *Ejemplos de opiniones*

La identificación de diferencias lleva a establecer hipótesis sobre los temas a explorar: la falta de código de barras hace que se relacione el cambio con las formas de distribución de la bebida; los años de fabricación hacen pensar en latas asociadas a stocks de mercado diferentes; etc. Una vez centrados en los motivos para la introducción de un nuevo formato, se producen coincidencias. Hay cuatro motivos de aparición frecuente. El Cuadro 1.9. recoge argumentos relacionados con cada uno de estos motivos. En todos ellos hay un esfuerzo

«La empresa nos quiere hacer consumir más. El líquido cae de una manera más continua y rápida en la lata alargada. Es más cómoda de beber. Además, en la nueva lata se aprovecha más el contenido. Hemos llenado las dos latas con agua y las hemos colocado con inclinación encima de un mármol del lavabo. Pero no podemos asegurar si las dos tenían la misma inclinación exacta, si han empezado a vaciarse en el mismo momento y si tenían la misma cantidad de agua».

«Los publicistas de la empresa han introducido un diseño más atractivo y moderno para los consumidores. Las latas alargadas se venderán más. Pero pensamos que no es suficiente. Tenemos que salir del aula para hacer una pequeña encuesta. Nos queda decidir a cuánta gente debemos preguntar para que los datos que recojamos sean suficientemente representativos».

«Los contables de la empresa quieren ahorrar dinero con el material. Hemos supuesto que el aluminio usado en el nuevo formato es de menor calidad porque es más delgado y cuesta menos de hundir. También hemos supuesto que el peso de la nueva lata es menor. La empresa puede tener un motivo económico. Con la balanza hemos comparado pesos. La lata alargada vacía nos ha dado 24,2, 24,6 y 24,9. La otra nos ha dado 27,0, 27,4 y 27,9. La alargada siempre pesa menos».

«Estamos seguros de que los contables de la empresa quieren ahorrar dinero con la bebida. Aunque digan que las dos latas contienen la misma cantidad de líquido, tenemos que ver que eso sea verdad. Ahora nos estamos organizando para calcular la capacidad de cada lata».

Cuadro 1.9. *Ejemplos de argumentos de alumnos*

por fundamentar las opiniones. Las estrategias se organizan a partir de la consideración de la vida cotidiana y de los recursos del entorno próximo. En este caso, el establecimiento de relaciones con lo que se sabe es una fuente de motivación y de implicación en la mayoría de alumnos. Motivación e implicación no son condiciones que se puedan presuponer ni deducir fácilmente de los textos escritos por los alumnos. No obstante, tenemos el convencimiento de que este tipo de actividades conlleva una educación matemática más interesante y que, además, promueve motivaciones más «permanentes» hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Destacan las formas de organización del trabajo poco «críticas». Leyendo el texto de las latas, hay alumnos que encuentran un teléfono de información y piden poder llamar. Después de que la operadora les habla sobre una prueba piloto de la empresa, deciden buscar información en Internet en el ordenador del aula. En el buscador *Google*, sin recurrir a la idea de palabras clave, escriben literalmente: ¿Por qué las latas de algunos refrescos tienen un nuevo formato de 33 cl? Les cuesta darse cuenta de que son ellos quienes deben dar respuesta al problema, que eso les requerirá elaborar una pequeña investigación y que es probable que el profesor no tenga la solución si no ha llevado a cabo algún tipo de investigación por su cuenta.

La situación de los alumnos haciendo una mala búsqueda en *Google* pone de manifiesto que para utilizar Internet hace falta una cierta educación. Toda la información recogida en las enciclopedias, en la televisión y en la enorme red de Internet está a nuestro alcance pero tenemos que saber buscarla. Actualmente, se habla mucho de adquirir competencias porque se considera que de la acumulación de los conocimientos ya se ocupa Internet. En el capítulo 5, nos referimos a la importancia del trabajo por competencias. Si no sabemos qué río pasa por la ciudad de Salamanca, Internet nos informará de que se trata del Tormes. No hace falta memorizar conocimientos geográficos ni acumular en la memoria listados de ciudades europeas. Sin embargo, hace falta un aprendizaje para usar Internet. Hay que tener los conocimientos suficientes para saber distinguir lo que es importante de lo que no lo es.

El Cuadro 1.10. contiene parte de un informe escrito. Corresponde a un grupo de alumnos que argumenta el ahorro de dinero con la cantidad de bebida como motivo principal para la introducción de un nuevo formato. Se plantean dos argumentos posibles y la elección de uno de los dos se vincula a consideraciones sobre la ética de la compañía de refrescos.

> «Nosotros hemos creído que todas las empresas hacen las cosas por motivos económicos. Quieren ganar el máximo dinero posible y reducir los gastos. Si una lata nueva sale al mercado es porque piensan que se puede ahorrar dinero. Si suponemos que la empresa no nos estafa y que en las dos latas hay la misma cantidad de líquido, tenemos que pensar que se ahorra dinero con el envase y no con la bebida».
>
> «(...) El experimento que hemos hecho con los pesos de las latas nos ha llevado a decidir que el ahorro es con el aluminio. Si las latas tienen la misma capacidad y la misma cantidad de bebida, la diferencia en los pesos tiene que ser por el aluminio. La lata que pesa menos tiene que estar hecha con aluminio que pesa menos. Todos pensamos que el aluminio, cuanto más delgado es, menos pesa».
>
> «(...) Pero después hemos visto que quizás sí que nos estafan. La lata alargada tiene la capacidad escrita en mililitros, 330 ml, mientras que la otra lata la tiene escrita en centilitros, 33 cl. Eso nos hace sospechar que nos estafan con la cantidad de bebida. ¿Por qué se utilizan unidades de medida diferentes? Tiene que haber algún motivo para haber cambiado de unidad y quizás este motivo está relacionado con lo que quieren que se crean los consumidores».

Cuadro 1.10. *Ejemplo de parte de un informe*

El planteamiento de problemas como éste de los envases permite hacer «más educativa» la educación matemática. Entender la práctica matemática como un espacio de controversia es uno de los grandes retos de la educación matemática del siglo XXI (Alsina, C., 2008). En el caso del ejemplo, la controversia viene dada por diferentes aspectos. Hay controversia respecto a los motivos para la introducción de un nuevo envase. Otras discusiones giran alrededor

de la conveniencia de salir fuera del aula —para ir a hacer una encuesta, para llenar las latas de agua, para pedir una balanza del laboratorio, etc.— También se discute la posibilidad de establecer conexiones entre disciplinas —con la demanda de conocimientos de las ciencias naturales sobre las formas de fijar el peso de un objeto, con el interés por conocer los principios éticos vinculados a la profesión de publicista, etc.— y entre materias dentro de la disciplina matemática —estadística y geometría, cálculo y geometría, estadística y cálculo, etc.

La implicación en la actividad anterior no aporta conocimientos indispensables. Podemos vivir, y vivir bien, sin saber los motivos que han llevado a la empresa a introducir un nuevo formato de envase. El trabajo del pensamiento crítico no siempre es productivo respecto a la construcción de conocimientos indispensables, en el caso dudoso de que este tipo de conocimientos exista. A menudo ni siquiera proporciona explicaciones precisas. Su valor debe buscarse en la capacidad de generar una mejor comprensión del mundo y, muy especialmente, en la capacidad de caracterizar todas las personas como actores principales en la interpretación de este mundo.

La actividad del plano de un piso[5]

➡ Representa tu piso ideal y compáralo con el piso del plano

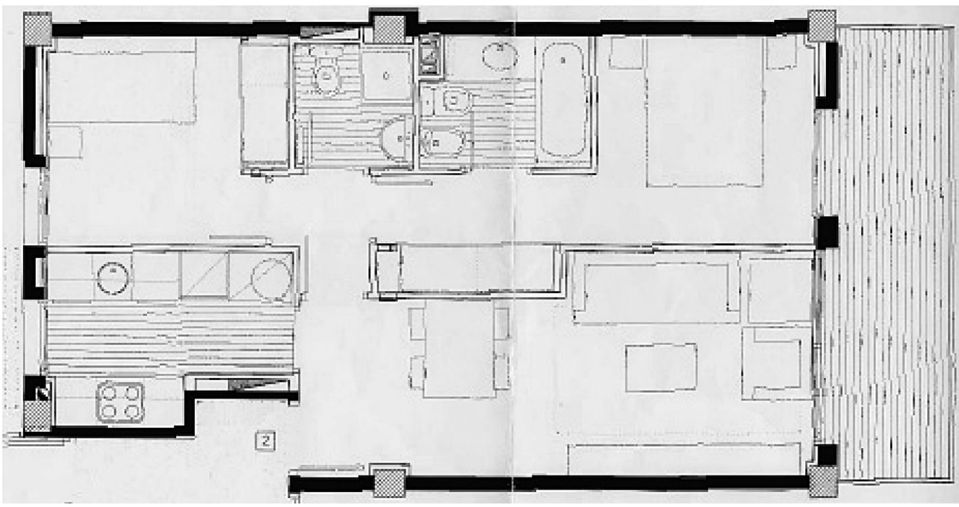


Figura 1.3. *Representación dada del piso*

[5] La idea de la actividad fue introducida por la profesora Sònia Esteve (Universitat de Vic, Barcelona) y Núria Planas en el marco del Grupo EMAC.

Después de haber pensado más de un minuto...

La actividad recoge elementos de una educación matemática crítica: toma de decisiones, construcción de alternativas, intercambio de información, cuestionamiento de la idea de solución única, elaboración de argumentos, etc. La explicación y la representación geométrica del piso ideal por parte de diversas personas conlleva interpretar un mismo tema de diferentes formas después de analizar la información del piso proporcionada en la Figura 1.3. y las representaciones de los pisos imaginados. Con el objeto de comprobar la riqueza de la actividad, mostramos datos de un aula. Los alumnos, organizados en pequeños grupos, primero opinan sobre el piso dado y más tarde sobre los pisos imaginados por los demás.

Estamos ante un problema que debe facilitar la activación del pensamiento alternativo, siempre y cuando esta demanda se haga explícita. Una vez se ha formulado el problema, debe pensarse en la posibilidad de generar más de una solución en función de los criterios que se usen. En el caso del aula observada, fue necesario intervenir porque todos los grupos tendían a ser repetitivos en sus razonamientos. Pensaban el piso ideal a partir de la modificación de algún pequeño detalle del piso dado. Ya sea por la ley del mínimo esfuerzo o porque creían que lo que se esperaba de ellos era que se ajustaran al piso dado, las primeras propuestas de pisos fueron rectangulares y con una distribución muy similar a la sugerida en el ejemplo. Para animarles a pensar respuestas totalmente nuevas se explicitó que podían pensar el piso que ellos quisieran. Algunos grupos mantuvieron el enfoque inicial y otros optaron por modificar casi todas las condiciones que habían fijado en un primer momento.

El problema también ha de facilitar el pensamiento de perspectiva. Este pensamiento ayuda a entender que no siempre hay una solución que es la mejor. De entre todos los pisos ideales que se lleguen a construir no habrá ninguno que sea mejor que los otros. Cada piso será ideal de acuerdo con unos criterios fijados. Con el fin de aclarar eso, fue necesario intervenir. Muchos alumnos no comprendían qué tenían de ideal los pisos de los otros. Se tuvo que explicar que cada persona decide qué considera a la hora de imaginar un piso ideal. Hace falta ponerse en el lugar de los demás y entender que personas diferentes sueñan con pisos de características diferentes. Después de estas aclaraciones, algunos alumnos explicaron que ellos, si pudieran, tendrían más de un piso ideal en función de sus múltiples expectativas de vida. Un chico distinguió entre un piso ideal para vivir habitualmente y un piso ideal para hacer fiestas. El primer piso tenía la habitación para dormir muy grande mientras que el segundo tenía un comedor inmenso y un dormitorio relativamente pequeño.

La proyección de experiencias personales en muchos comentarios del Cuadro 1.11. confirma la implicación en la tarea. Hay quien no considera una ventaja tener más de una habitación o más de un baño. Muchos alumnos asocian la cantidad de habitaciones y baños con el número de personas que compar-

«Actualmente la mayoría de pisos son de dos habitaciones; este piso es como la mayoría».

«Cuesta encontrar pisos rectangulares como éste porque la mayoría de edificios tienen esquinas y hacen pisos con formas más extrañas».

«Es extraño que la cocina y el comedor estén separados en un piso tan pequeño, tendrían que haber hecho una cocina office para que pareciera mayor».

«Este balcón en proporción es mayor que el piso, no sé si es demasiado razonable».

«El piso sólo tiene dos habitaciones, si no contamos el comedor, que puede ser una tercera habitación si compramos un sofá que también sirva de cama».

«Para que el piso tuviera recibidor se tendría que haber hecho una distribución totalmente diferente y se perdería mucho espacio».

«Los lavabos no tienen ventana pero seguro que están bien ventilados porque el piso tiene que haber superado todas las pruebas de habitabilidad».

«La superficie total debe ser la misma que la de los minipisos, no debe pasar de 40 m^2, contando las paredes y todos los espacios perdidos donde hay las calderas y las cañerías».

«Mi piso ideal es un poco como éste, pequeño pero bonito».

«No entiendo por qué hay dos lavabos en un piso de dos habitaciones, es como si cada habitación tuviera que ir con su lavabo».

«El ancho del balcón creo que es suficiente para poder poner una mesa; yo diría que es casi una gran terraza».

«Necesito saber si está encarado hacia el mar o hacia la montaña, y si es un piso alto o bajo».

Cuadro 1.11. *Ejemplos de opiniones de los alumnos*

ten el piso. Este dato informa, por ejemplo, sobre el contexto social predominante en el aula. Otros alumnos consideran un inconveniente tener cocina y comedor en compartimentos separados; asocian la misma función a los dos espacios y encuentran absurdo separar físicamente los momentos de cocinar y comer. Algunos ubicarían la cocina-comedor en el centro del piso. Los argumentos de algunos alumnos son tan convincentes que llevan a modificar aspectos de los pisos ideales de compañeros. Se entiende que puede haber muchas alternativas diferentes y que es bueno modificar los planteamientos iniciales si los argumentos de los otros aportan información que así lo recomiende. El Cuadro 1.12. recoge ejemplos de argumentos elaborados.

Destaca el debate sobre cómo determinar el centro de un piso con distribución rectangular. Se sabe encontrar el punto central del rectángulo pero se difiere en cuanto a la determinación geométrica de un centro que sirva de cocina-comedor. Puede parecer poco relevante hablar del «centro de un piso». No es tan importante, desde luego, el tema sugerido por los alumnos como la

«Primero hemos pensado que el piso ideal debía tener unas medidas rectangulares, 10x8 ó 9x8 porque un rectángulo parece una forma buena. Cuando hemos oído que ellos decían que cualquier cantidad se puede poner como un rectángulo, nos hemos dado cuenta de que 65 m^2 no son medidas rectangulares y que quizás tenían razón. De todos modos, todavía tenemos la duda de si cualquier número puede representar el área de un piso con forma de rectángulo».

«Es un piso sin centro. Lo que no teníamos claro es si todas las figuras geométricas tienen centro. Al final hemos dicho que la cocina-comedor, para que esté en el centro exacto, también debe tener forma de rectángulo. Ella decía que la cocina-comedor puede estar en el centro sin ser un rectángulo. Ya sabemos que lo que importa es que sea una figura con el mismo centro que el rectángulo grande, pero hemos decidido que sea un rectángulo más pequeño. Ahora el problema que tenemos es dibujar un rectángulo pequeño en el centro del rectángulo grande».

«¿Cómo podemos representar la altura del piso ideal? Nuestro problema es que no sabemos cómo representar la altura porque la escala la hemos hecho a partir de los cuadrados de la hoja. Hemos visto que teníamos hojas cuadriculadas y que no hacía falta una escala con números. Hemos hecho que cada 9 cuadrados fuera 1 m^2. Para dibujar 1 m^2, no necesitamos ver cuántos cuadrados hay en la hoja».

«Cuando él ha hablado de la gente con silla de ruedas, hemos cambiado totalmente la forma de pensar el piso ideal. Mi primo va en silla de ruedas y quiero que pueda entrar en mi casa. Ahora estamos pensando qué amplitud deben tener las puertas. Tú nos has dicho que la silla de ruedas también tiene que poder girar, que no siempre irá en línea recta. Eso será un problema».

«Hacemos que la cocina sea la mitad que el dormitorio y el doble que el lavabo, 10, 20 y 5 m^2 estaría bien. Así son números redondos. El dormitorio tiene que ser muy grande. Pero si es un piso para hacer fiestas, entonces lo que tiene que ser grande es el comedor».

Cuadro 1.12. *Ejemplos de argumentos de alumnos*

manera de tratarlo. El posicionamiento crítico destaca cómo pensamos por encima de qué pensamos. La calidad del pensamiento viene dada por las líneas de argumentación que se siguen. Cuando los alumnos empiezan a discutir cómo establecer geométricamente el punto central de figuras geométricas, la calidad del pensamiento radica en la capacidad de transferir la noción de centro de una circunferencia al caso de algunos polígonos regulares.

Por otra parte, hay quien se muestra sorprendido por no disponer de información visual sobre la altura del piso. Se llega a decir que los pisos más altos corresponden a la gente con más dinero o que en ellos caben literas. La discusión sobre cómo representar la altura de un piso en una hoja de papel es de una gran riqueza. Se habla de dibujar en perspectiva una caja de zapatos o de coger el envoltorio de un paquete de 500 folios como representación de la maqueta de un piso. Dos alumnos dibujan su piso ideal en una hoja cuadri-

culada por medio de un prisma rectangular que les permite señalar medidas de la altura del piso. Uno de ellos dibuja dentro del prisma grande un prisma interior de la misma altura para señalar la situación céntrica y tridimensional de la cocina-comedor. Destaca un alumno que considera la inclusión de la variable altura en la discusión como una manera de querer resolver un problema creando otro mayor. Para este alumno, se está actuando con poca eficacia porque se complica el problema de manera innecesaria.

El Cuadro 1.13. muestra parte del informe escrito de un grupo. Este informe es un buen ejemplo del uso de preguntas como hilo conductor de una argumentación. Las preguntas planteadas indican aprendizajes y dificultades del grupo, tentativas de estrategias, relaciones establecidas, etc. Se ve, además, que los alumnos se implican tanto en la actividad, que la piensan como una aproximación a sus condiciones de vida en un futuro a medio plazo. Se argumenta el valor de los razonamientos encadenados en base a experiencias personales y el conocimiento de pisos concretos. Al conectarse la actividad con experiencias reales, se trabaja la educación matemática desde el punto de vista de las competencias para vivir.

«Una vez que hemos decidido que nuestro piso ideal tenía que parecerse mucho a lo que nos han dado, hemos empezado a pensar en pequeños cambios que nos interesaría hacer. ¿Por qué tendríamos que cambiar la forma rectagular del piso? ¿Qué nos aportaría una forma diferente? Después de pensar en otras formas, como la cuadrada, hemos preferido mantener la forma rectangular porque también permite una buena distribución de las habitaciones. Algunas habitaciones incluso pueden ser cuadradas porque cualquier rectángulo tiene dentro uno o más cuadrados».

«(...) La idea de colocar la cocina-comedor en el centro del piso ha hecho que empezáramos a dibujar rectángulos concéntricos al del piso hasta encontrar uno que fuera lo bastante grande para ser cocina y comedor al mismo tiempo. ¿Para qué sirve tener la cocina-comedor en el centro? Creemos que se tiene que hacer más vida en una parte del piso y que estar en el centro ayuda a encontrarse mejor. ¿Cuántos pisos conocemos que sean de esta manera? Ninguno, pero en el futuro podemos reorganizar el piso que compramos y hacerlo así de acogedor. Creemos que no decimos disparates. Un disparate sería un piso redondo. ¿Cómo pondríamos los muebles? ¿Cuánto espacio perderíamos?»

Cuadro 1.13. *Ejemplo de parte de un informe*

EL PENSAMIENTO CRÍTICO EN LA OBRA DE ESTALELLA

En este capítulo hemos presentado parcialmente propuestas de actividades con el fin de motivar el trabajo y el aprendizaje del lector. Desde una perspectiva pedagógica es habitual la idea de que una de las principales finalida-

des de toda didáctica es, paradójicamente, estimular la figura del aprendiz autodidacta. Puede decirse, por lo tanto, que hemos planteado propuestas de trabajo con la finalidad de estimular el trabajo autónomo. Quizás algunos lectores se han sentido desorientados por el hecho de no haber dado las soluciones de las actividades. Este olvido ha sido deliberado. Queremos que cada uno recuerde cómo se ha enfrentado a las actividades ejemplarizadas, cuánto tiempo y esfuerzo ha dedicado. Saber cómo nos hemos enfrentado debe servirnos para hacer un diagnóstico de nuestra situación como *pensadores críticos* y valorar hasta qué punto nos podemos considerar pensadores *ejercitados*. Por otra parte, las soluciones, cuando tenga sentido encontrarlas, deberán continuar buscándose después de haber pensado mucho más de un minuto.

La obra *Ciencia Recreativa*, de Josep Estalella, aporta otros contextos para completar el diagnóstico inicial de nuestra capacidad de pensamiento crítico. Para completar todavía más este diagnóstico, recomendamos la lectura de los diálogos matemáticos contenidos en Chamoso, Graña, Rodríguez y Zárate (2004) y la de Vila y Callejo (2005). Los episodios de Planas y Alsina, À. (2006) también han de contribuir a la reflexión sobre qué significa el pensamiento crítico en situaciones de práctica matemática. A continuación, presentamos situaciones problemáticas diseñadas por Estalella con la intención de promover un pensamiento abierto y autónomo. Se trata de enunciados que pretenden facilitar la aptitud de formular preguntas y la capacidad de relacionar conocimientos y darles sentido en un contexto concreto. El buen resolutor de estos problemas no es alguien que sabe muchas matemáticas, sino alguien capaz de organizar las matemáticas que sabe y comunicarlas.

Por la línea del Pacífico

Estalella presenta una actividad sobre resolución de problemas de trenes basada en una situación clásica que quizás hará rememorar a muchos adultos la manera cómo trabajaron la aritmética y la resolución de problemas durante su periodo de escolarización. Durante casi todo el siglo XX los problemas de trenes fueron una constante en las clases de matemáticas —trenes que salían de ciudades distintas, con velocidades distintas, y que supuestamente habían de coincidir en algún lugar—. Sin embargo, la pretensión del autor al plantear esta situación va más allá de hacer aplicar operaciones aritméticas previamente aprendidas. Estalella quiere despertar la curiosidad y fomentar la actividad heurística, en especial, la búsqueda y aplicación de estrategias. Un elemento esencial del pensamiento crítico es la idea de repensar lo que ya se ha pensado. Por eso, debe empezarse poniendo en duda los propios argumentos. En este fragmento del libro, Estalella recomienda dudar de lo que se ha pensado en un primer momento y revisar los razonamientos seguidos. La actitud interrogativa debe mantenerse incluso cuando se cree haber resuelto el problema. Este principio en la obra de Estalella es de absoluta vigencia desde la perspectiva del pensamiento crítico.

Por la vía férrea del Pacífico, que une a Nueva York con San Francisco de California, circulan los trenes directos entre las dos capitales, que salen de una y otra todos los días a las siete de la mañana y emplean siete días en el trayecto. Se pregunta: el tren directo que hoy sale de Nueva York, ¿con cuántos trenes directos se cruzará en el camino?



A primera vista es posible que conteste el interpelado que puesto que el viaje dura siete días y cada día sale de San Francisco un tren, el directo de Nueva York a San Francisco se cruzará con siete directos de San Francisco a Nueva York. Mas contestando así, se olvidan los trenes que, a la hora que salió el de Nueva York, estaban en la línea por haber salido de San Francisco en días anteriores.

Con este problema, podemos preguntar qué interés tiene conocer en cuántas ocasiones se cruzan los trenes de la línea ferroviaria Nueva York-San Francisco, sobre todo teniendo en cuenta que Estados Unidos es un país geográficamente muy lejano y que en la actualidad no tiene mucho sentido recorrer distancias tan largas en tren. Algunos alumnos plantean preguntas similares a sus profesores ante la resolución de problemas con pocas dosis de funcionalidad. Son situaciones en las que debe prevalecer la manera de enfocar la resolución antes que el contexto sugerido por el enunciado del problema. En el ejemplo de los trenes se requiere una mentalidad abierta y un ingenio que permitan descubrir un camino diferente del que se supondría a primera vista. Esta mentalidad abierta tiene que permitir imaginar el problema a pesar de que la línea ferroviaria no sea la de Barcelona-Madrid ni tenga sentido pensar en un trayecto de siete días en la época de los trenes de alta velocidad. También debe permitir interpretar la pregunta —¿con cuántos trenes se cruzará a lo largo del camino?— desde la curiosidad. La construcción de conocimiento no siempre se puede justificar a partir de criterios de funcionalidad. La curiosidad es un argumento igualmente válido para poder justificar la implicación en procesos de resolución de problemas.

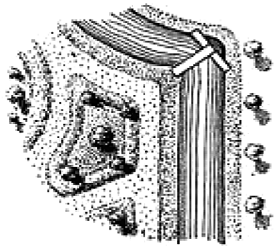
En otras palabras, los problemas de trenes clásicos no son poco adecuados en sí mismos; resultan poco adecuados si se usan para organizar situaciones de aprendizaje rutinarias y recurrentes. Para el desarrollo del pensamiento crí-

tico no es necesario restringirse a problemas contextualizados en la vida real, ni siquiera es bueno centrarse solo en ellos porque esto supondría una importante falta de diversidad en las propuestas de tipos de problemas. Lo relevante es gestionar cualquier tipo de problema de un modo abierto y autónomo para el aprendiz, como sugiere Estalella. Los propios investigadores de la corriente «Educación Matemática Realista» (Heurel-Panhuizen, 1996) hablan de la necesidad de diversificar los contextos de los problemas en matemáticas.

Pasarela compuesta

Desde el punto de vista del contexto geográfico, el enunciado que reproducimos es mucho más próximo que el anterior ya que se sitúa en el Parque de la Dehesa, en Girona. Se trata de un enunciado que sugiere una discusión sobre la ética en el comportamiento de unos chicos que quieren entrar en un parque cuando ya está cerrado. La necesidad de cruzar un canal para llegar al parque da pie a un buen ejemplo de resolución geométrica. Los chicos deben plantear preguntas básicas del pensamiento crítico: ¿Qué está pasando?, ¿por qué?, ¿qué implicaciones tiene este hecho?, etc. Deben aprovechar toda la información del enunciado para decidir qué información es relevante y qué datos faltan. Hemos escogido esta actividad porque pone de relieve una idea clave del pensamiento crítico al no haber una pregunta bien definida. El lector ha de interpretar la situación que se explica y valorar la decisión tomada por los chicos. Tiene sentido, por ejemplo, plantearse si la resolución geométrica de los chicos es la más adecuada o si podría llevarse a cabo en la práctica.

> *En la Dehesa, el hermoso parque de Girona, hay un jardincito rodeado por un ancho canal que le sirve de valla. Dan ingreso al jardín dos pasos sobre el canal, con verjas de hierro, que se cierran a última hora de la tarde.*
>
> *Unos muchachos, deseosos de flores, quieren entrar en el jardín burlando la vigilancia del guardián. Van provistos de un par de tablas, con las que piensan establecer una pasarela sobre el canal. Mas al ir a hacerlo, advierten que han elegido unas tablas demasiado cortas, pues no llega su longitud a la anchura del canal. Sin embargo, yendo además provistos de ingenio, estos muchachos no retroceden: en uno de los ángulos del canal arman con las dos tablas una pasarela compuesta y logran realizar su intento.*



Estamos ante un magnífico problema de lógica e ingenio, que hace necesaria la aplicación de las nociones de área y longitud, relacionándolas con la posición en el espacio. Si suponemos que el ángulo del canal es recto y que las dos maderas son de la misma longitud, se puede demostrar con trigonometría elemental que la longitud mínima de las maderas tiene que ser un 94,28% de la longitud del canal. Parece, pues, que el ingenio de los muchachos depende en gran medida de su suerte al haber escogido unas maderas no demasiado pequeñas. En general, se trata de un problema que simula un contexto real y que involucra conocimientos matemáticos complejos. Si se decide, sin embargo, que no se persigue precisión numérica, admite aproximaciones geométricas muy variadas.

Sean cuales sean los conocimientos básicos que se usen, conviene activar un cierto espíritu problematizador, que es el *Esprit mathematique* del que habla Peter Handke en la referencia que encabeza el capítulo, y también el espíritu vivo, mencionado en la fachada de la Universidad de Heidelberg en referencia al pensador crítico. Al leer el problema de Estalella, no podemos dar por buena la respuesta de los chicos sin haberla explorado previamente. En este sentido, el problema no es un problema resuelto sino un problema con una propuesta de resolución. Hace falta intepretar la propuesta de resolución y, a continuación, pensar qué propuesta suscribiríamos. Necesariamente, cualquier propuesta diferente a la construida por los chicos del enunciado será una propuesta pensada desde la comparación y la diferenciación. El pensamiento crítico también es eso: relacionar las propuestas alternativas con las ya dadas.

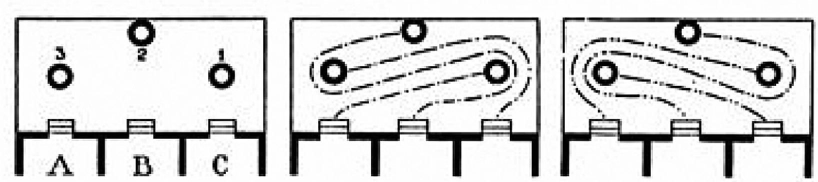
Los pozos de la casa de vecindad

En este problema, Estalella plantea una situación de separación o vecindad. Estas situaciones originan en la actualidad infinidad de problemas que acostumbran a resolverse con escaso pensamiento crítico, tanto si estos problemas surgen en el contexto de pequeñas comunidades de vecinos (que a menudo acaban resolviéndose en los juzgados), como si se producen entre países, vecinos o no (con soluciones drásticas de las que los medios de comunicación, lamentablemente, nos informan cada día).

El problema en cuestión trata una de las primeras nociones topológicas básicas, sencilla y por lo tanto apta para ser propuesta a niños de las primeras edades. Se puede resolver a partir de un material sencillo, o con un dibujo. Sólo hay que encontrar la forma y la posición de las líneas capaces de constituir las fronteras deseadas.

> *Los tres departamentos A, B y C de una casa de vecindad dan al patio y en éste hay tres pozos. Por razones que no es del caso indagar ni exponer, la vecina de A ha de surtirse de agua en el pozo 1, la de B en el 2 y la de C en el 3. Son*

revoltosas comadres estas vecinas, y para evitarles ocasiones de andar a la greña, el casero previsor les ha cercado en el patio, con espino artificial, los respectivos caminos de los departamentos de los pozos. Claro está que estos caminos no han de cruzarse. ¿Cómo ha logrado el casero conseguir que esta condición se cumpla?



A un pensador crítico ejercitado le costaría aceptar que *hay razones que no hay que indagar ni exponer*, tal como se dice en el enunciado del problema. Es natural preguntarse por qué no cambian de casa las tres mujeres de manera que cada una viva delante del pozo de donde se supone que tiene que sacar agua. La línea recta es el camino más rápido y el que evitaría más fácilmente los encuentros no queridos. Cuesta imaginar también que por el hecho de no cruzarse los caminos, las mujeres no se ven ni se interpelan. Sería necesario conocer la extensión del patio donde están los pozos. El patio debe ser lo bastante grande si se quiere que los caminos estén suficientemente alejados. Existen otros datos significativos que no se mencionan. Así, por ejemplo, el enunciado no fija ningún horario de recogida de agua en el pozo. Convendría saber qué horarios deberían respetar las tres mujeres para no coincidir durante sus trayectos de ida y vuelta. Las resoluciones de tipo topológico han de ser comentadas después de haberse aceptado, rechazado o modificado las condiciones del enunciado.

Hemos seleccionado esta actividad porque consideramos que el contexto del enunciado crea una situación ambigua que sirve de estímulo al trabajo del pensamiento crítico. Es importante entender que los enunciados de los problemas no son realidades acotadas y cerradas de las que no puede decirse nada. A menudo reducimos nuestra actividad matemática a la resolución de problemas y no prestamos atención a la necesidad de una actividad matemática crítica vinculada a la interpretación de los enunciados. En muchas ocasiones, la manera de resolver un problema depende menos de cuáles son nuestros conocimientos matemáticos que de cómo los organizamos en función de nuestra interpretación del contexto asociado al enunciado del problema. Un problema situado aparentemente en un contexto real puede parecer poco creíble y puede conllevar un replanteamiento. Con más frecuencia de la que intuimos, los enunciados de los problemas pueden requerir algún tipo de revisión.

Hemos reinterpretado brevemente actividades de Estalella como propuestas de pensamiento crítico. La implicación en las actividades depende de la

capacidad de hacer preguntas y trabajarlas con otras personas. Hemos insistido en la necesidad de saber preguntar cuestiones relevantes y de saberlo hacer de manera compartida. Los ejemplos introducidos, los nuestros y los de Estalella, deben gestionarse adecuadamente. Una actividad no es crítica por el enunciado que lo acompaña sino por la dinámica que se crea en torno a su resolución. Esta dinámica debe sugerir cuestiones, curiosidades y dudas, sin que eso signifique necesariamente llegar a conclusiones. Cuando el pensamiento crítico no lleva a resolver problemas o a extraer conclusiones, también es productivo. Decíamos que la productividad reside en comprender mejor el mundo. A esta idea hay que añadir la productividad dada por el hecho de ser capaz de problematizar el conocimiento sobre este mundo.

2

La manipulación

«Para que el cerebro de la cabeza supiera lo que era una piedra, fue necesario que los dedos la tocaran, sintieran su aspereza, el peso y la densidad, fue necesario que se hirieran con ella. Sólo mucho tiempo después, el cerebro comprendió que de aquel remiendo de roca se podría hacer una cosa a la que llamaría puñal».

JOSÉ SARAMAGO (2000: 92)

LA ACCIÓN DE MANIPULAR, es decir, de operar con las manos, aporta conocimientos diversos. Todos nosotros hemos vivido experiencias sorprendentes, no esperadas, al tocar algún objeto con las manos: la dureza de un objeto, el peso, la rugosidad, el sonido que hace, el sabor que tiene, etc. Esta información se obtiene por un proceso de observación de las características físicas de los objetos (el color, la forma, la medida, el sabor, etc.). Descubrimos estas propiedades a través de la experimentación sobre los objetos. Este tipo de conocimiento se llama físico y tiene su origen en los objetos externos, en el mundo físico que nos rodea.

¿Qué ocurre cuando manipulamos dos o más objetos al mismo tiempo y los relacionamos? ¿Podemos decir que es un conocimiento físico o un conocimiento sólo físico? La relación que hacemos no está propiamente en los objetos; es fruto de un proceso de abstracción que realizamos las personas: diferenciamos un objeto blando de uno duro; uno que pesa de uno que no pesa; uno suave de uno rugoso; pero no vemos, ni tocamos, ni olemos, ni oímos «la diferencia» entre estos objetos físicamente diferentes. Decimos que son diferentes porque relacionamos las experiencias obtenidas en la manipulación de estos objetos. Del mismo modo, si vemos cuatro objetos ante nosotros no vemos, ni tocamos, ni olemos, ni sentimos en ningún momento «el cuatro»; el cuatro surge de abstraer la coordinación de acciones al encontrarnos en situaciones donde había cuatro objetos. Es evidente, pues, que el hecho de detectar «la diferencia» o «el cuatro» va más allá del conocimiento físico. Ya hemos argumentado que estas abstracciones no existen por ellas mismas en la realidad, es decir, no provienen directamente de los objetos sino de la acción que nosotros hacemos con ellos. El conocimiento matemático permite hacer estas relaciones. Mas en general, la manipulación de objetos aporta conocimiento físico y conocimiento matemático.

Desde inicios del siglo XX, la manipulación de materiales como herramienta para desarrollar el conocimiento matemático y científico ha sido un campo muy investigado por numerosos expertos de prestigio nacional e internacional en el ámbito de la psicología del aprendizaje, la pedagogía, la matemática y la ciencia, sobre todo. Destacamos a Maria Montessori, Jean Piaget, Josep Estalella, Ovide Decroly, Celestin Freinet, Hans Freudenthal, Zoltan P. Dienes y Gastón Mialaret, sin olvidar a otros muchos autores que han realizado aportaciones muy interesantes respecto al uso del material en la clase de matemáticas y que no queremos dejar de mencionar, ya que son el precedente de lo que se está realizando en estos momentos en nuestro contexto en materia de educación matemática inclusiva: Pedro Puig Adam, que dejó muy claros sus planteamientos en su famoso decálogo (Puig Adam, 1955); M. Antonia Canals, cuyo trabajo en esta línea queda muy bien reflejado en la web del GAMAR, un centro de materiales y de investigación para la matemática en la escuela (http://gamar.udg.edu); Carme Burgués, Claudi Alsina y Josep Mª Fortuny, con numerosas publicaciones (Alsina y Fortuny, 1995; Alsina, Burgués y Fortuny, 1987, Calvo, Carbó, Farell, Fortuny y otros, 2002), Joan Casulleras, Adolf Almató, Rafael Pérez-Gómez, Fernando Corbalán, etc., junto con grupos de trabajo como el Grup Zero o el Grup Perímetre, entre otros.

Para todos ellos, la manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje.

La médica y antropóloga italiana Maria Montessori (1964) es pionera en el uso de materiales manipulables para el desarrollo de lo que ella denomina inteligencia. Ella hace célebre la frase «el niño tiene la inteligencia en la mano», en referencia al aprendizaje de los niños a través de la manipulación y la experimentación de los objetos. En la pedagogía montessoriana, la psicomotricidad y la educación sensorial son habilidades clave para el desarrollo mental. La autora lo expresa de una manera sencilla diciendo que a menudo el material llama al niño, lo estimula y guía. El llamado material Montessori es un material clásico de entre los usados en las clases de matemáticas. Hay barras azules y rojas para la introducción de las cifras del uno al diez, cajas de rodillos para el trabajo del cero, cifras de papel de vidrio para la relación entre números y símbolos, perlas doradas para la iniciación al sistema decimal, collares de perlas de colores para la iniciación a sistemas no decimales, triángulos constructivos para la presentación de la geometría, entre muchos otros materiales.

Piaget e Inhelder (1975) establecen hasta qué momento conviene utilizar material para desarrollar la inteligencia en general, y el conocimiento mate-

mático en particular. Piaget delimita estadios de desarrollo de la inteligencia. Sus investigaciones con muchos niños y niñas de diversas edades le permiten constatar que hasta los doce años aproximadamente las personas necesitamos situaciones concretas para construir aprendizajes. Hay que hacer acciones sobre objetos concretos para poder aprender. Otros expertos han criticado esta afirmación al considerar, por ejemplo, que las fronteras que llevan de un estadio a otro no son tan marcadas como Piaget pretendía. Dicho de otra manera, no todas las personas que llegan a una edad superan un estadio, ya que hay muchos otros factores que intervienen, como la experiencia del contexto. Aunque el tema de los estadios ha sido controvertido, se ha compartido la idea de que las personas necesitamos aprender a partir de la acción sobre los objetos, dado que la manipulación permite hacer representaciones mentales que favorecen la construcción y la interiorización de conocimientos.

Estalella (1918) divulga el conocimiento matemático a partir de actividades basadas en materiales manipulables, a menudo objetos de uso corriente. Propone partir de la experimentación, después resolver problemas o enigmas, y a partir de aquí construir modelos. Así, concreta una secuencia de aprendizaje que empieza con conocimientos ligados a la realidad, propiciando la manipulación, y avanza hacia la abstracción y la formalización a partir de la representación, el cambio de contexto, el uso de símbolos, etc. Con ello, Estalella defiende un equilibrio integrado entre la manipulación y el trabajo de aspectos formales de las matemáticas. La suya es una obra para lectores adultos, y tiene plenamente en cuenta la manipulación como requisito de un aprendizaje matemático y científico comprensivo.

Decroly (1965), inspirador de la Escuela *«pour la vie par la vie»*, parte de la observación de la naturaleza y de la manipulación para despertar el interés y la intuición de los aprendices. Este pedagogo belga cree que la escuela —como institución que proporciona conocimiento— tiene que servir a los aprendices y no los aprendices a la escuela. Por este motivo, su pedagogía se fundamenta en aprender a partir de centros de interés escogidos por los aprendices. Parte de «sorpresas», objetos diversos que atraen la curiosidad de los aprendices en el contexto familiar o en el entorno: una fruta, un animal doméstico, pueden ser objetos de observación que a través de un examen sensorial proporcionen conocimientos concretos.

En la pedagogía decroliniana, los objetos se examinan sensorialmente: primero se observan; después, con los ojos cerrados o por medio de vendajes, se profundiza en sus cualidades, palpándolos, pesándolos, oliéndolos, si es posible saboreándolos, y finalmente midiéndolos. Eso comporta cuantificar lo cualitativo y utilizar una unidad para expresar el resultado de la medida. En consecuencia se introduce el cálculo y la medida de magnitudes continuas como el peso, la masa, la capacidad, la longitud, la superficie o el volumen. Las unidades usadas por los más pequeños acostumbran a ser, según ellos convengan, la mano, el brazo, la longitud del cuerpo, bolsas con arena, etc. La repre-

sentación de estas medidas sobre un papel da paso a un tipo de medida más simbólica y, poco a poco, se pasa al uso de otros tipos más abstractos, que todos conocemos y que forman parte del llamado Sistema Internacional de Unidades.

Freinet (1968) considera que las personas aprendemos a partir de las propias experiencias. La actitud investigadora, la curiosidad por lo que nos rodea, el respeto por las propias realizaciones y las de los otros, el buen uso de los materiales, etc., posibilitan un ambiente de aprendizaje rico. Este punto de vista le lleva a afirmar, con respecto al aprendizaje de las matemáticas, que la mayoría de alumnos las viven como una actividad artificial que no entienden. Freinet quiere romper este esquema partiendo, como Decroly, de la diversificación de los lugares de aprendizaje: cocina, campo, jardín, museo, aula, fábrica, etc. Dice que hay que aprender matemáticas con el fin de resolver problemas prácticos de jardinería, de fabricación de objetos, de organización de un viaje o de envío de la correspondencia. Además de apoyar el uso de materiales para aprender matemáticas, impulsa el movimiento Educación Matemática Realista, que defiende la conexión de los conocimientos matemáticos con el entorno.

El fundador de la corriente realista fue el matemático de origen alemán Hans Freudenthal. La corriente surge como reacción al movimiento de la matemática moderna —basada en la Teoría de Conjuntos— y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática, generalizado en muchas escuelas europeas de los años setenta. Freudenthal (1967) entiende la matemática como una actividad humana próxima a todo el mundo. Las matemáticas, según él, tienen que servir para resolver los problemas de la cotidianidad. Todo el mundo es capaz de aprender matemáticas y «matematizar», es decir, de aplicar conocimientos matemáticos en los objetos, tanto en los de naturaleza propiamente matemática como en los cotidianos. La matematización de objetos de la realidad permite una aproximación matemática a las situaciones de la vida cotidiana.

En el marco de la corriente realista, se presta especial atención a los contextos en la resolución de problemas. Los materiales son por sí mismos contextos que permiten imaginar la situación planteada y a menudo representarla a través de un modelo. Freudhental (1991) menciona los artefactos cotidianos, los recortes de prensa, las fotografías, los juegos de mesa y las obras de arte como ejemplos de «contextos-materiales». El uso de estos contextos ha de permitir asociar la práctica matemática con experiencias previas y situaciones futuras. En particular, estos contextos no deben ser tratados como un ruido susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático sino como una forma de facilitar el acceso a este mensaje y su desarrollo.

El nombre de Dienes es sinónimo de los bloques multibase, diseñados como instrumentos mediadores para la enseñanza del sistema de numeración. Este autor también inventó diversos materiales algebraicos, además de los famosos bloques lógicos (Dienes, 1970). El nombre de bloques lógicos hace referencia a

la multitud de operaciones lógicas que pueden establecerse entre grupos de bloques. El lugar privilegiado de Dienes en el campo de la investigación en educación matemática viene de haber demostrado que a través de materiales se pueden enseñar estructuras matemáticas desde las primeras edades.

Mialaret (1984) es otro pedagogo de reconocido prestigio que ha apoyado el uso de materiales para aprender matemáticas. Habla de las etapas por las que hay que pasar con el fin de asegurar la construcción sólida de las bases matemáticas. En uno de sus libros más conocidos, *Aprendissage des mathématiques*, escrito en 1967 y publicado en diversos países (en España se publicó el año 1984 con el título *Las matemáticas: ¿cómo se aprenden, cómo se enseñan?*), señala la importancia de la acción. En primer lugar, es necesario manipular si se quiere, más adelante, representar acciones para poder resolver problemas. Con todo, la acción por ella misma no es suficiente. Se requieren otros procesos como el lenguaje, es decir, la verbalización de la acción.

La revisión de autores pone de relieve la importancia histórica de la manipulación como tema. La manipulación es una necesidad básica de las personas. Establece los fundamentos que han de permitir desde la infancia ir construyendo progresivamente los conceptos matemáticos, que son abstractos. Cuando la manipulación va acompañada del desarrollo del pensamiento crítico, el énfasis en el juego y la atención a la diversidad, decimos que estamos más cerca de una educación matemática de calidad.

Dentro de la manipulación, también hay requisitos de calidad. La introducción de la manipulación como un principio esencial del trabajo de matemáticas tiene que plantearse con dosis de sentido común. En el ámbito de la geometría, por ejemplo, es importante empezar manipulando objetos de tres dimensiones, que son principalmente los que hay en nuestro entorno. Todavía es demasiado habitual empezar dibujando puntos, líneas y figuras planas antes de manipular cuerpos sólidos. La manipulación de recortables de figuras planas o el punteado de estas figuras se tiene que usar en una justa medida y no debería preceder la manipulación de objetos del entorno.

Puntos, líneas y superficies son abstracciones difíciles de situar en el mundo físico. No obstante, si cogemos un cubo, un dado, una caja de bombones, etc., podemos encontrar todos los elementos anteriores organizados espacialmente: puntos formando esquinas de la caja, líneas rectas paralelas delimitando caras, ángulos y paralelogramos... Igualmente, la manipulación de un globo se puede usar en la familiarización con círculos, circunferencias y curvas en general. La transición de cuerpos espaciales a figuras planas se puede hacer a partir de secciones y proyecciones. Sería bueno no invertir la secuencia de trabajo. El paso de lo concreto a lo abstracto así lo recomienda y el sentido común de muchos niños también. Es interesante recordar el caso de un niño que se pasó el parvulario haciendo fichas de lenguaje matemático y que, a pesar de todo, decía de un círculo que era una especie de globo aplastado.

El controvertido filósofo Herbert Spencer (1990), en *L'educació intel·lectual, moral i física*, obra publicada por primera vez en año 1861, habla de la necesidad de desarrollar la capacidad de manipulación que «tanta falta hace a la mayoría de gente» y de hacerlo de acuerdo a «principios de sentido común». Spencer pone el ejemplo de la geometría. Dice de esta ciencia que se debería presentar en relación a la manipulación de objetos del entorno, dejando que «la naturaleza nos enseñe el camino». Sólo más tarde se tendrían que introducir procedimientos geométricos sistemáticos y propiedades de un supuesto mundo plano. Después de un trabajo suficiente de las habilidades de observación, manipulación y descubrimiento, el aprendiz puede ser introducido a la geometría de las soluciones metódicas, pero todavía aquí se tiene que continuar dando prioridad a la observación, la manipulación y el descubrimiento. De acuerdo con Spencer, lo que el aprendiz descubre por medio de la observación y la manipulación queda mejor aprendido que todo lo que se le pueda explicar.

Hasta aquí, sólo hemos mencionado autores que argumentan a favor del uso de materiales concretos en el desarrollo de la práctica matemática. Aun así, el uso de materiales manipulables no se asume de forma incuestionable por todo el mundo, ni en los ámbitos profesionales ni en los académicos. La educadora matemática Elizabeth Fennema (1972), por ejemplo, argumenta en contra del uso de materiales concretos en estudiantes de matemáticas adultos. La propia autora, sin embargo, concluye que la escasez de beneficios en el uso de materiales puede deberse a aspectos de la instrucción y al compromiso de los estudiantes. En general, el uso de materiales concretos no debería plantearse en oposición con otros modelos.

En el ámbito profesional, la adhesión al uso de materiales no es en absoluto mayoritaria. Hace poco, una maestra de educación primaria acostumbrada a trabajar con materiales nos explicó que había conseguido que en clase de matemáticas sus alumnos estuvieran casi tan contentos como estaban en el recreo. Este comentario contrasta con las palabras de una profesora de secundaria. Durante un curso de formación permanente propusimos insistentemente el uso de materiales para el trabajo de matemáticas en la educación secundaria. El último día del curso nos agradeció las sesiones y añadió: «Ha sido muy interesante. De todos modos, no usaré materiales el año próximo porque no quiero que mis alumnos confundan la hora de clase de matemáticas con la hora del recreo». Las dos maestras hicieron referencia al recreo, pero en sentidos muy diferentes. La primera maestra daba prioridad a cómo aprende el alumnado, mientras que la segunda pensaba en cómo tenía que enseñar.

No podemos dejar de hablar de la manipulación en las edades más avanzadas. La manipulación no es un valor educativo restringido a las primeras edades y propio de una educación matemática «iniciática». La eficacia de la educación tiene que ver, a cualquier edad, con la satisfacción del aprendiz hacia las tareas que se le proponen. El uso de materiales ha de beneficiar esta satisfacción. Con todo, edades diferentes requerirán usos diferentes de materiales.

A lo largo de la infancia, la juventud y la madurez, los principios para una educación matemática de calidad son los mismos. De los 0 a los 100 años se tienen que poder manipular objetos de la vida cotidiana y tomarlos como punto de partida de pensamientos autónomos y complejos. Quien de pequeño manipuló con satisfacción objetos del entorno y los pensó como objetos «para descubrir», probablemente será un adulto interesado en continuar «descubriendo».

La manipulación, el pensamiento crítico, el juego y la atención a la diversidad han de contribuir a la configuración de escenarios emocionales positivos para una mejor implicación en el trabajo de matemáticas y, por lo tanto, un mejor aprendizaje. Los estados de indiferencia y apatía no son buenos amigos del aprendizaje. En particular, cuando se usan materiales, es más fácil conseguir que el aprendiz mantenga la atención, el interés y la concentración en la tarea. El aprendiz con sentimientos de rechazo hacia lo que se supone que ha de aprender difícilmente será una persona satisfecha y feliz. Los efectos del fracaso (matemático) escolar en el presente y el futuro de una persona son, naturalmente, mucho más relevantes que el propio aprendizaje (matemático).

ACTIVIDADES CON MATERIALES MANIPULABLES

Nos hemos referido al significado de la manipulación y a las repercusiones de la acción directa sobre los objetos en el desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, los objetos no son más que eso, objetos. ¿Cuándo decimos que un objeto se convierte en un recurso potente para desarrollar el pensamiento matemático? El educador matemático Anton Aubanell mantiene que un objeto pasa por una especie de ciclo vital en su contacto con el mundo escolar, como si se tratara de un ser vivo (Aubanell, 2006):

- Nace como recurso cuando un profesor descubre en él posibilidades didácticas.
- Crece inmerso en el ambiente de la clase, alimentándose de cosas tan reales e indefinidas como el interés, la implicación, el entusiasmo, la sorpresa, las ganas de descubrir... del alumnado y del profesor.
- Se reproduce en forma de ideas matemáticas, estrategias, imágenes mentales, etc.
- Muere cuando, habiendo dado su fruto didáctico, vuelve a ser un objeto.

Este ciclo es extensivo a todos los ámbitos: un objeto se convierte en un recurso no sólo por mediación de un profesor, sino por fenómenos como la curiosidad de cada uno. Todo el mundo aprende observando y experimentando con el entorno. Los profesores tienen un papel importante, pero no son los únicos que pueden desencadenar un ciclo de estas características. No toda la educación matemática pasa por la escuela. Por delante, está la capacidad de descubrimiento de cada uno y de interiorización de conocimientos aprendidos en otros con-

textos. Algunas clasificaciones sobre materiales manipulables dejan entrever esta idea. La clasificación de Alsina, À. (2006) distingue dos tipos de materiales:

– *Materiales inespecíficos:* a pesar de no haber sido diseñados con finalidad didáctica, la escuela les otorga esta función. Ejemplos: conchas, calabazas, piñas, pinzas de la ropa, plantas aromáticas, piezas de madera, trozos de ropa, etc.
– *Materiales diseñados didácticamente:* han sido concebidos con finalidad didáctica, y pueden ser comercializados o bien diseñados por el profesor. Ejemplos: bloques lógicos de Dienes, tangrams, geoplanos, pentaminós, tetrabolos, etc.

Unos y otros sirven para descubrir de qué están hechos los objetos —madera, metal, vidrio, ropa, etc.—, sus cualidades sensoriales —colores, texturas, temperaturas, olores, sonidos, medidas, etc.—, las acciones que se pueden hacer —agrupar, clasificar, ordenar, emparejar, seriar, apilar, etc.— y los cambios que se producen. Aubanell propone una clasificación más exhaustiva que resumimos en el Cuadro 2.1. La clasificación completa se puede consultar en *Recursos, materiales y actividades experimentales en la educación matemática secundaria* (Aubanell, 2006). Todo el material clasificado por Aubanell debe

MATERIALES	
Instrumentos útiles para una acción concreta	**Modelos materiales de uso didáctico en matemáticas**
• *De medida y patrones:* regla graduada, cinta métrica, pie de rey, etc. • *De cálculo:* calculadora, ordenador, ábaco, etc. • *De representación:* compás, calculadora gráfica, escuadra, etc. • *De comunicación:* retroproyector, pizarra (electrónica), pantalla, etc.	• *Respecto al material y su manejo:* estáticos —basados en la analogía entre forma y concepto matemático que se representa (figuras de madera)— y dinámicos —implican una acción que permite descubrir una propiedad matemática (dominó suma-resultado). • *Respecto del origen:* construidos por nosotros, comercializados o bien objetos cotidianos. • *Respecto de la gestión de aula:* individuales o en grupos reducidos y colectivos. • *Respecto de la eficiencia:* no llega al objetivo, lo alcanza o lo sobrepasa. • *Respecto de la intención:* para descubrir, motivar, simular, construir, demorar, mostrar, visualizar o aplicar.

Cuadro 2.1. *Clasificación de materiales desarrollada por Aubanell (2006)*

entenderse como un complemento de la actividad matemática, no como un sustituto de otras representaciones también importantes. Una función de los materiales es ayudar a establecer conexiones con otros tipos de representaciones (algebraicas, geométricas, numéricas, etc.).

El abanico de materiales aptos para aprender matemáticas a partir de la acción directa es casi infinito. El lector interesado puede consultar la dirección web http://gamar.udg.edu, donde hay una amplia muestra de materiales manipulables. El Gabinete de Materiales para la Matemática en la Escuela, GAMAR, es un espacio de reflexión y práctica en torno a la enseñanza de las matemáticas de la Universidad de Girona. Sus objetivos son trabajar a favor de un aprendizaje de las matemáticas ligado a las vivencias, basado en la experimentación y el descubrimiento, y potenciador de las capacidades de intuición, razonamiento y creatividad.

A continuación exponemos actividades centradas en materiales. Aportamos una muestra pequeña de las posibilidades de cada material. Habrá que usar estos materiales teniendo en cuenta que su uso nunca debe prolongarse más de lo necesario, de acuerdo con lo que nos enseñó Puig Adam (1956), gran didacta y matemático. El material es un recurso muy válido para fundamentar el aprendizaje matemático, pero la verdadera actividad matemática es mental. De acuerdo con esto, hemos seleccionado materiales con un fuerte carácter exploratorio, especialmente adecuados como marco para la resolución de problemas, la discusión, la comunicación y la reflexión. Comentamos los materiales porque su mera descripción no los hacen útiles, ni su mera manipulación hace «fáciles» las matemáticas. Hay que aprender a usarlos y explorarlos.

OPERACIONES CON EL *SOROBAN*

➡ **¿Cómo podemos encontrar el resultado exacto de 316 x 74 con el *soroban*?**

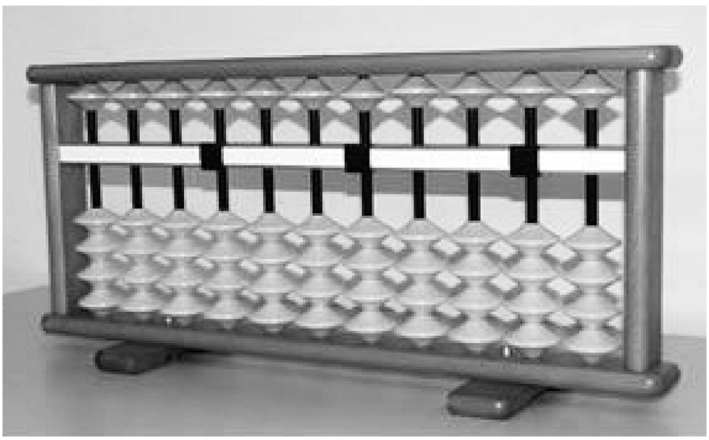


Figura 2.1. *Imagen de un ábaco japonés o soroban*

Después de haber pensado más de un minuto...

Nuestro algoritmo de la multiplicación permite encontrar la solución de una manera relativamente rápida. También se puede obtener el resultado de la operación haciendo un cálculo mental. A excepción de las personas capaces de hacer cálculos de una manera extraordinariamente rápida, como Gauss o, más recientemente, Ramanujan, en general se puede dar un resultado aproximado. Una forma de obtener el resultado exacto y de manera casi instantánea es ir a buscar una calculadora. Cualquiera de estos procedimientos, sin embargo, no garantizan la comprensión de la noción de multiplicación. La mayoría de personas han aprendido a calcular a través de una técnica, de un algoritmo, sin hacer énfasis en la comprensión.

Hay culturas que han desarrollado maneras alternativas de calcular, basadas en una combinación de técnica y comprensión. Un ejemplo lo encontramos en las culturas chinas, japonesas y rusas, que han usado el ábaco desde tiempos inmemoriales, para calcular de manera eficiente. En estas culturas, cuando se alcanza un nivel sofisticado de manipulación de las piezas del ábaco, no necesariamente se están entendiendo bien los conceptos matemáticos implicados. Sin embargo, si somos nosotros quienes exploramos las posibilidades del ábaco e indagamos formas de operar a partir de él, ponemos en marcha formas de comprensión mucho más completas porque construimos en base al pensamiento inductivo, que en general es más productivo que el deductivo.

El ábaco es un material manipulable adecuado para la comprensión de la numeración en base diez y para el cálculo. Consiste en un tablero con alambres paralelos por donde se desplazan unas bolas agujereadas. Cada columna representa una posición decimal (unidades, decenas, centenas...) y, por lo tanto, diez bolas de una posición equivalen a una bola de la siguiente. Hay muchos modelos. El ábaco chino o *suan pan* se usa en China desde el siglo VIII. En cada columna hay cinco bolas que representan la unidad y dos bolas que representan cinco unidades, separadas por una barra central.

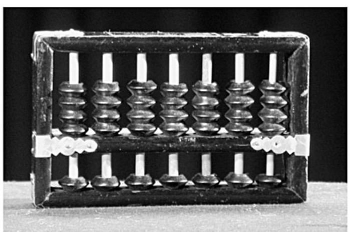


Figura 2.2. *Ábaco chino o suam pan*

El ábaco japonés o *soroban* aparece en Japón en el siglo XIV, probablemente importado de China. En comparación con los ábacos chinos, ha perdido dos bolas: una de las unidades y una de cinco unidades, como se puede ver en la Figura 2.1. El ábaco ruso o *stchoty*, utilizado en regiones iraníes bajo el nombre de *choreb* y en Armenia y Turquía bajo el nombre de *coulba*, está formado por columnas de diez bolas con valor de unidad. En el ábaco ruso hay dos bolas negras en el centro de cada columna con el fin de orientar al usuario. Las bolas siempre se desplazan de derecha a izquierda. Hay una columna con cuatro bolas que tiene dos funciones: indicar la coma y permitir calcular en

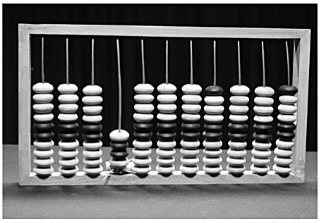
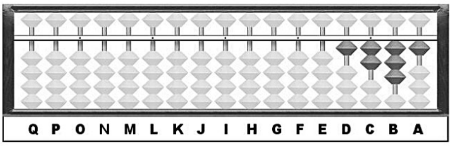


Figura 2.3. *Ábaco ruso o stchoty*

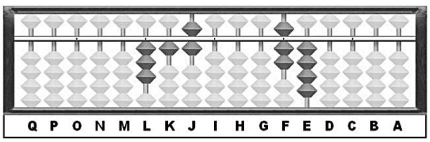
cuartos de rublos. Las otras dos columnas permiten calcular en *kopeks* (1 rublo = 100 *kopeks*).

Finalmente, hay el ábaco de uso didáctico, donde se usan bolas o anillas de colores. En cada vara se pueden poner nueve bolas como máximo, ya que siguiendo las normas de funcionamiento de cualquier ábaco, diez bolas de una posición equivalen a una bola de la siguiente.

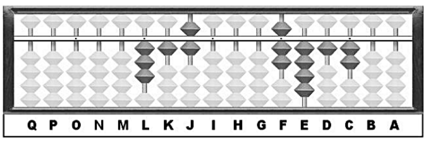
El ábaco japonés funciona a partir de descomposiciones del tipo 7=10-3 o bien 8=10-5+3, a causa de la reducción de bolas. El valor de las bolas es posicional: cada bola inferior vale una unidad y la superior cinco. Las bolas sólo tienen valor cuando se apoyan en la barra central. La vara A representa las unidades, la B las decenas, y así sucesivamente. Para representar el 8, por ejemplo, se acerca la bola de cinco unidades a la barra central con el dedo índice y las tres inferiores con dicho pulgar de la mano derecha, mientras con la izquierda sujetan el ábaco. Se combina la técnica con la comprensión, dado que en todo momento se visualiza, y se pueden llegar a hacer movimientos a una velocidad extraordinaria. En el ábaco siguiente, por ejemplo, hay representado el número 1231.



La manera más habitual de multiplicar en Japón consiste en anotar el multiplicando en la parte izquierda del *soroban*. Se dejan varas de separación con el multiplicador, que se anota en la parte derecha del *soroban* (dejando a su derecha tantas varas a cero como cifras tiene el multiplicando más una).

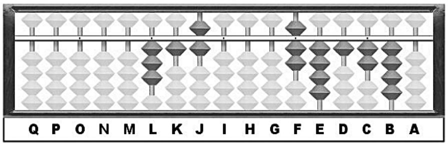


Se hace 3 x 4 = 12, que se anota a la derecha de la vara donde hay representado el 4 (D y C):

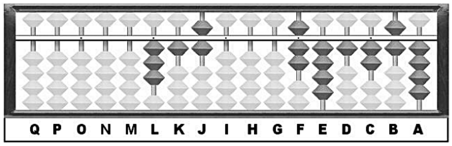


Posteriormente se multiplican las cifras del multiplicando por la cifra de las unidades del multiplicador y se anotan los resultados.

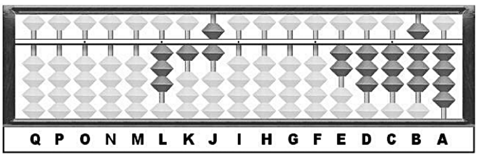
1 x 4 = 04 (0 en C y 4 en B)



6 x 4 = 24 (2 en B y 4 en A)



Se borra la cifra de unidades del multiplicador y se repite el proceso con la cifra de las decenas, y así sucesivamente hasta completar la operación. Cuando se han multiplicado todas las cifras por 4, se saca el 4 del *soroban* y se repite el mismo proceso con el 7. Se obtiene el resultado de la multiplicación: 23384. Finalmente se leen el multiplicando y el producto, ya que el multiplicador desaparece en el cálculo.



El ábaco es un material didáctico que se tiene que explicar. Es difícil llegar a conocer sus posibilidades de forma autónoma. Después de haber pensado más de un minuto, es muy probable que el lector que no estuviera previamente familiarizado con este material no haya adivinado cómo usarlo. En este sentido, el ábaco no es un material accesible a todo el mundo. El material por él mismo no plantea problemas que el aprendiz pueda trabajar por cuenta propia. Como decíamos, en este caso es difícil descubrir la función del material y provocar una actividad espontánea en torno a su manipulación. Eso, sin embargo, no impide que se pueda presentar, como lo hemos hecho, a fin que se haga el esfuerzo de conocerlo lo más autónomamente posible.

El conocimiento del ábaco como instrumento de cálculo lleva a reflexionar sobre las relaciones entre la cultura matemática de las personas y la cultura dominante en la sociedad donde viven. En la China actual, por ejemplo, la adquisición de la cultura china dominante pasa por el conocimiento del ábaco. En nuestra sociedad, en cambio, la cultura matemática de las personas tiene otros signos de identidad. Sería extraño encontrar a alguien que vive hace años en España y que no sabe reconocer una balanza de un solo plato. En el trabajo con materiales, por lo tanto, se ha de ser consciente del carácter mediador de la cultura en su uso. Incluso aquellos materiales supuestamente neutros, desde un punto de vista cultural tienen fuertes connotaciones culturales.

De los materiales Montessori, por ejemplo, se acostumbra a decir que son accesibles a todo el mundo y que toda persona puede deducir fácilmente la característica particular que conviene aislar en cada uno de ellos. El espíritu matemático de toda persona, tal como decía Montessori, tiene que hacer que se pueda trabajar con el material de manera autónoma y segura. No obstante, hoy día, en las escuelas que usan material sensorial Montessori, hay muchos alumnos con dificultades para encontrar el sentido, ya sea por su cultura de origen o por sus características individuales.

La famosa bolsa de agua caliente que Montessori diseñó con la intención de trabajar el sentido del calor puede acabar siendo un obstáculo en la implicación de algunos niños. Una maestra nos explicaba que un niño de su aula no había entendido por qué alguien podía querer tener una bolsa con agua caliente. La maestra había dejado materiales sensoriales en rincones del aula —bloques cilíndricos para la vista, campanillas cromáticamente acordadas para el oído, cajas de efectos sonoros y bolsas de agua caliente con diferentes temperaturas—. Había pedido tocarlos y observarlos tanto como se quisiera. Previamente, había pedido que se pensara para qué podían servir todos aquellos materiales. El niño dijo de todos los materiales que servían para decorar, salvo las bolsas de agua que eran «demasiado feas y no servían para nada». Ni siquiera quiso tocarlas.

Descubrimiento de propiedades numéricas con las regletas[1]

➡ **Explora la relación entre el cuadrado de dos números consecutivos usando regletas**



Figura 2.4. *Regletas numéricas de Mª Antònia Canals*

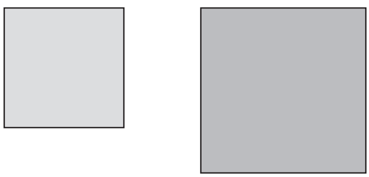
[1] La idea de la actividad fue introducida por los profesores Mª. Antònia Canals y Miquel Mallén en el marco del Grupo GAMAR.

Después de haber pensado más de un minuto...

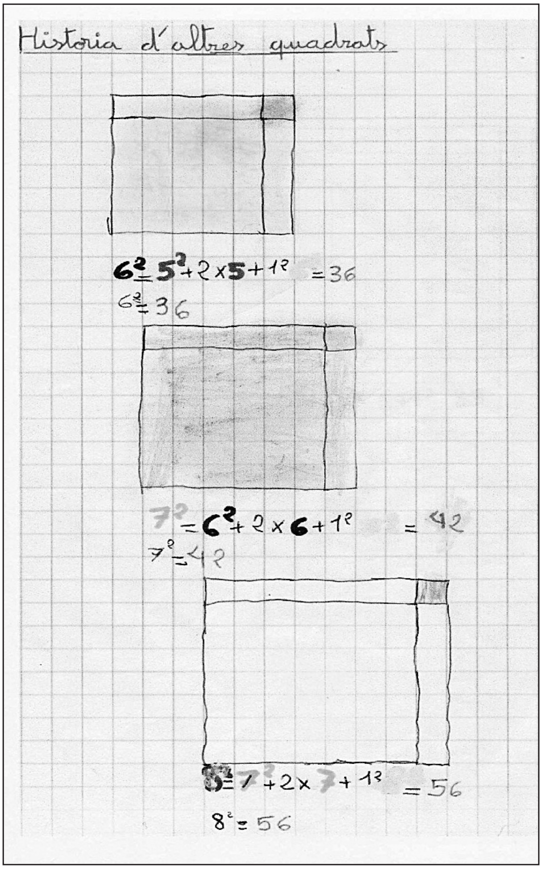
Hay muchas maneras de descubrir la relación entre dos números cuadrados consecutivos, por ejemplo entre 22 y 32, o entre 32 y 42. Es habitual consultar un libro de texto de matemáticas donde se explique la relación de manera expositiva. El lector lee la explicación y, si está suficientemente bien narrada, la puede comprender y aprender, pero no la construye porque no sale de un proceso de curiosidad y de exploración interna. Otra manera, para alguien con un cierto dominio del conocimiento matemático, es a través del cálculo. Se puede partir de casos concretos e intentar llegar a una ley general para todos los casos a través del álgebra. Otra manera aún más visual y menos académica, es mediante las regletas. Hay diferentes tipos de regletas: de Dienes, de Cuisenaire, de Canals, etc. Las últimas combinan las características de las dos anteriores. Las Regletas numéricas de Mª Antònia Canals se presentan en cajas de madera, con la distribución y el número de unidades siguiente:

Regletas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	60	60	30	30	30	30	30	10	10	40
Cuadrados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	60	25	15	10	10	6	2	2	2	12
Cubos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	60	30	10	8	8	2	1	1	1	4

Si se toman dos cuadrados consecutivos, por ejemplo el del 2 y el del 3, las figuras siguientes representan los productos 2·2 y 3·3:



Hay que pensar qué regletas se tienen que añadir al cuadrado de 2 para conseguir el cuadrado de 3. Se puede hacer lo mismo con otros números cuadrados consecutivos: 32 y 42; 42 y 52; 52 y 62, etc. Sería bueno pensar qué regletas hay que añadir al cuadrado de 6 para obtener el cuadrado de 7. En la imagen siguiente tenemos el ejemplo de la producción de un niño que con la ayuda de este material llega a comprender la relación. Hace la siguiente representación de su descubrimiento en el papel en blanco:



A pesar de que hay un error de cálculo en la suma final (por ejemplo: $8^2=7^2+2x7+1^2=56$, en lugar de 64), es evidente que a partir de casos concretos como el anterior, basados en la visualización de la relación que se establece entre dos números cuadrados consecutivos, se puede llegar a comprender, a generalizar para cualquier caso y a formular una ley, que es uno de los objetivos de la matemática. Hay muchas maneras de formular esta ley. Un niño que ha aprendido con las regletas podría decirlo así: «Para pasar de un número cuadrado a un cuadrado consecutivo hay que poner el cuadrado del primer número, más dos veces la regleta del primero más la regleta de 1».

Con conocimientos de cálculo y de álgebra se puede escribir $7^2 = 6^2+2\cdot6+1^2$. De manera general, $(n+1)^2 = n^2+2\cdot(n\cdot1)+1^2$, o sea $(n+1)^2 = n^2+2n+1$.

Como se ve, las regletas numéricas, además de ser eficaces en la comprensión de conceptos, potencian habilidades características del saber matemático. Así favorecen la adquisición progresiva de la competencia numérica, aspecto que trataremos con más profundidad en el capítulo 5. Ayudan a familiarizar-

se con los números naturales, a conocerlos en profundidad. En particular, permiten:

- Experimentar y descubrir relaciones entre los números, sus cuadrados y los cubos.
- Visualizar las operaciones y favorecer su práctica.
- Hacer estimación de resultados y discutir diferentes soluciones.
- Fundamentar el razonamiento a partir de la manipulación.
- Favorecer la imaginación de los números y su expresión verbal.
- Adquirir agilidad en el cálculo mental.
- Facilitar el paso al lenguaje matemático escrito, aprendiendo significados de signos.
- Investigar cuestiones numéricas, que son como los «misterios» de los números.
- Descubrir propiedades de las operaciones y estrategias numéricas.
- Trabajar la superficie y el volumen.

Desde una perspectiva estrictamente calculística, las regletas permiten un trabajo progresivo de las operaciones. Una secuencia inicial podría ser la siguiente:

- Sumas y restas sin llevar.
- Sumas y restas llevando.
- Sumas y restas largas sin llevar.
- Sumas y restas largas llevando.

Ni con las regletas ni con el ábaco se busca rapidez en las composiciones de números o en la realización de cálculos, respectivamente. En el aprendizaje de la aritmética pueden interesar aspectos muy diferentes entre ellos: grado de avance en el mecanismo de las operaciones, perfección mecánica, rapidez en el cálculo, aptitud en la resolución de problemas, etc. Cada uno de estos aspectos recibe una mejor atención en función de la actividad que se piense para el trabajo de la aritmética. Con todo, un trabajo completo de la aritmética los debería tener a todos en cuenta sin confundirlos. Por ejemplo, es fácil confundir el grado de avance en el mecanismo de las operaciones con la perfección mecánica.

La perfección mecánica surge de la práctica reiterada y precisa de realizar muchas operaciones siempre con un mismo instrumento; se puede tener perfección mecánica con papel y lápiz, con calculadora, con el ábaco chino o con la mente. Eso, sin embargo, no garantiza comprender el mecanismo de las operaciones. Una persona que divide con perfección mecánica por números de tres cifras no sabrá necesariamente hacer divisiones por cuatro cifras. Con el fin de deducir el procedimiento con cuatro cifras, hace falta una cierta com-

prensión del procedimiento de división. Lo mismo ocurre con sumar y restar: hace falta haber comprendido los conceptos de suma y resta con el fin de saber hacer sumas cuando se llevan unidades si sólo se han hecho antes sumas cuando no se llevan unidades.

Tal como decía el pedagogo Alexandre Galí (1928), la adquisición de la perfección es una tarea de automatización, mientras que la comprensión de los mecanismos es una tarea intelectual. Los materiales, tanto las regletas como el ábaco son un apoyo principalmente a la necesidad de comprensión y se tienen que entender, por lo tanto, como apoyo a la tarea intelectual. En particular, el uso adecuado de las regletas es una manera de comprender relaciones entre el conjunto de números y de estudiar por separado propiedades. El aprendizaje de la descomposición mecánica de un número en unidades, decenas y centenas no garantiza la comprensión de nuestro sistema posicional en cuanto a la representación de los números. Los procesos de comprensión son el resultado de avances progresivos en etapas donde aparecen diferentes dificultades a vencer. La comprensión del sistema posicional, por ejemplo, no viene dada de forma automática por la práctica precisa de composiciones y descomposiciones de números en una situación donde siempre se use el mismo recurso didáctico. Son necesarias otras actividades y, además, hay que acompañar la (des)composición en papel y lápiz con la realizada con materiales —regletas—, pero también con otros apoyos.

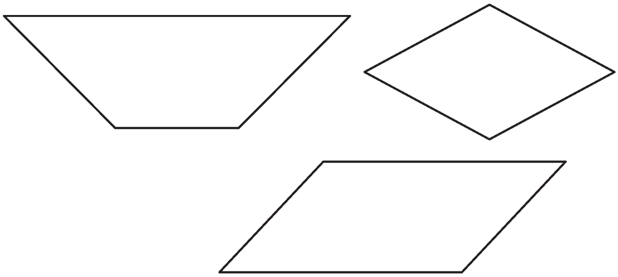
Desgraciadamente, las evaluaciones escolares en el ámbito de la aritmética, centradas en el hecho de haber resuelto bien las operaciones y haberlo hecho con rapidez, no dedican la atención suficiente a la comprensión de estas operaciones y de las propiedades de los números que hay detrás. Cuando llegue el día en que el énfasis se ponga en la comprensión por medio del uso de materiales más o menos clásicos, es probable que se supere la dominancia de los criterios de perfección y rapidez. Ese día, los aprendices podrán colaborar entre ellos porque sin el criterio de rapidez pierde su sentido el criterio de competitividad.

Galí, preocupado por el uso escolar nefasto de la aritmética, decía que los materiales son un obstáculo en un aprendizaje de la aritmética entendido como una carrera de obstáculos. Según este autor, el trabajo de la aritmética exclusivamente con papel y lápiz y avezado al entrenamiento de resolutores rápidos y precisos, es una manera de evaluar personalidades por delante de conocimientos. En los criterios de rapidez y precisión intervienen, además de las aptitudes de cálculo, factores de temperamento, de percepción y ejecución en el orden manual o gráfico, de resistencia a la fatiga, etc.

Por otra parte, las personas que aprenden más rápidamente a recitar y usar las tablas de multiplicar, no son siempre las que mejor entienden los mecanismos involucrados en una multiplicación. Como Galí, creemos que en el trabajo comprensivo de la aritmética sería muy adecuado alternar actividades de verbalización oral, con otras de soporte escrito y otras de soporte material.

Composiciones y descomposiciones con el tangram

➡ **¿Qué figuras del tangram son necessarias para conseguir estas figuras?**



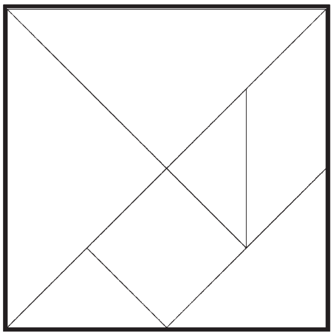


Figura 2.5. *Modelo del tangram chino*

Después de haber pensado más de un minuto…

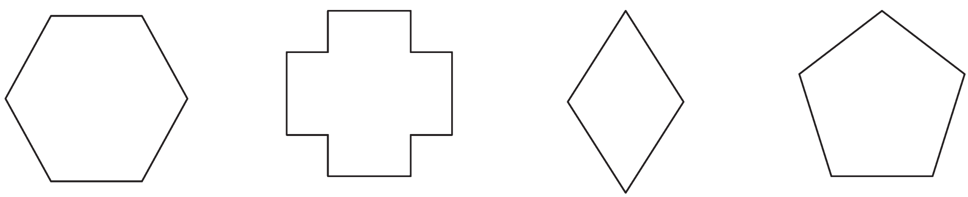
Tradicionalmente, el aprendizaje de la geometría se ha realizado de manera estática, con figuras estereotipadas —el triángulo equilátero, el cuadrado, el hexágono regular, etc.— y de manera alejada del movimiento y la acción, dos requisitos para un buen dominio del espacio. Uno de los primeros pasos en la dinamización de la geometría es el trabajo de (des)composiciones. Componer figuras es la acción de unir dos o más figuras para obtener una nueva. Descomponer es, lógicamente, la operación inversa.

Si reducimos la acción de componer y descomponer figuras a hacer actividades con lápiz y papel, se limitan las posibilidades de desarrollo del pensamiento geométrico. Hacer geometría implica manipular, experimentar, indagar, descubrir... Un buen recurso para llevar a cabo las acciones que acabamos de mencionar es el tangram. El tangram es un juego de origen chino del cual se desconoce tanto quién lo inventó como cuándo lo inventó.

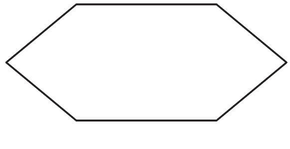
Algunos autores señalan que ya existía en la época de la dinastía Chu (740-330 a.C.). En aquel entonces se le denominaba tabla de sabiduría y tabla de sagacidad, haciendo referencia a las muchas cualidades del juego. El término «tangram» es un invento occidental. Se supone que fue creado por un norteamericano aficionado a los rompecabezas, quien habría combinado la palabra cantonesa *tang* —chino— con el sufijo inglés *gram* —escrito y gráfico—.

En la actualidad hay muchos tipos de tangrams, comercializados o no. Cualquier tangram es un rompecabezas fácil de construir puesto que se obtiene dividiendo un polígono en cuadrados, triángulos y romboides, etc., en función del modelo de tangram que queramos obtener. Uno de los modelos más conocidos es el tangram chino de la Figura 2.5. Se caracteriza por tener siete piezas de formas básicas (cinco triángulos, un cuadrado y un paralelogramo). Desde una perspectiva genérica, es útil en la preparación de la noción de superficie y su medida.

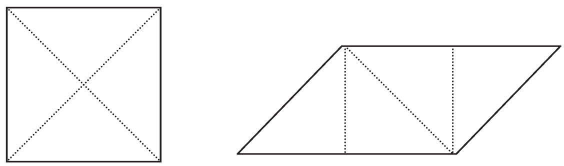
Una actividad clásica con el tangram es la construcción de figuras nuevas mediante la composición de diversas piezas. Para la construcción de figuras en cualquiera de los modelos de tangram, se deben seguir dos reglas: utilizar en cada figura todas las piezas y no superponerlas. Muchos tangrams comercializados llevan una guía que invita a reproducir figuras de animales, personas, casas, flores u otros objetos —se conocen hasta 1.600 figuras distintas posibles con el tangram chino—. Cuando hay una pauta con el dibujo representado con las figuras en él, la actividad es sencilla. La tarea se complica cuando desaparece la guía, y hay que imaginar en la mente cuáles son las figuras necesarias para componer una forma determinada que nos proponen. La actividad se puede complicar a medida que el criterio es más complejo. Por ejemplo: ¿utilizando los cuatro triángulos de tangram puede conseguirse alguna de las siguientes figuras?



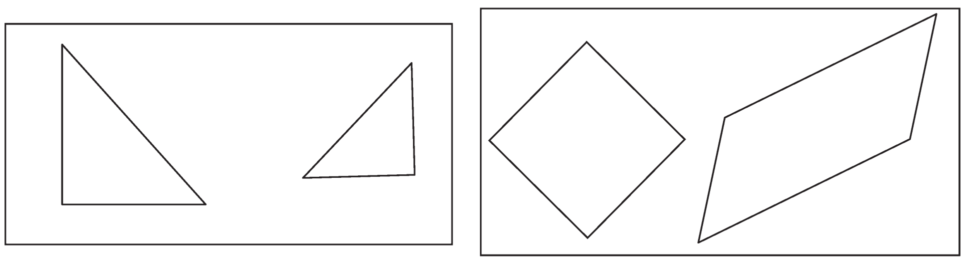
O bien: usando todas las piezas del tangram, ¿se puede construir esta otra figura?



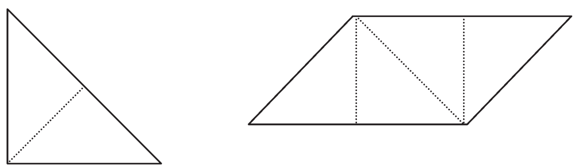
También se pueden intentar construir triángulos usando tres piezas del tangram, o bien cuatro piezas. Es interesante investigar si se puede construir algún triángulo usando más de cuatro piezas. Esta misma idea se puede repetir con otras figuras conocidas. Por ejemplo, construir rectángulos usando cada vez un número mayor de piezas. Otra actividad es descubrir propiedades de equivalencia entre figuras aparentemente diferentes que, no obstante, ocupan la misma superficie (cuatro triángulos pequeños):



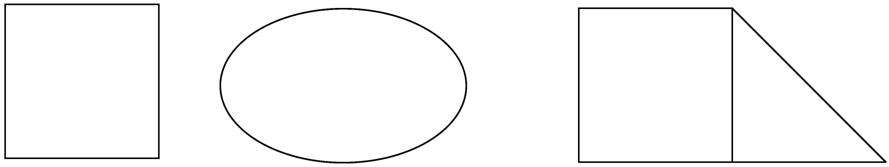
A partir de esta idea, con el tangram se pueden construir o identificar parejas de figuras equivalentes. Se pueden comparar, por ejemplo, los pares siguientes:



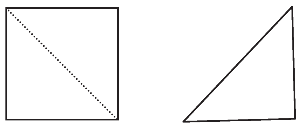
Otra opción es medir superficies, usando como unidad el triángulo pequeño:



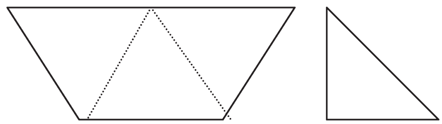
¿Se puede saber qué superficie ocupan estas figuras?



Medir nos permite comparar figuras en función de su superficie:



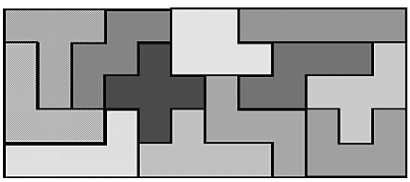
La superficie del triángulo es 1/2 de la superficie del cuadrado



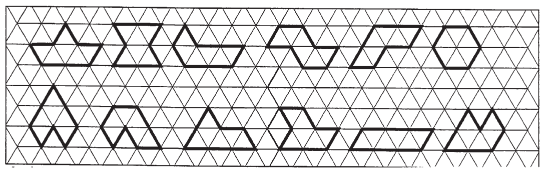
La superficie del triángulo es 1/3 de la superficie del trapecio

En síntesis, la composición y descomposición de figuras con el tangram permite, entre muchas otras cosas, profundizar en el conocimiento de las figuras y sus propiedades. Hay otros materiales manipulables que permiten hacer actividades parecidas a las anteriores. Citamos, a modo de ejemplo, los *pentominós* y los *hexamantes*. Un pentominó es una figura geométrica formada a partir de cinco cuadrados unidos por sus lados. Existen 12 pentominós diferentes.

Los hexamantes son polipolígonos formados por seis triángulos equiláteros unidos por sus lados. Estas figuras compuestas permiten hacer muchas actividades: agrupar las doce piezas de dos en dos; formar una sola figura con las doce piezas (por ejemplo, un rombo); etc. Como en el caso de los pentominós, y por una curiosa coincidencia, también existen 12 diferentes:



Pentominós



Hexamantes

A lo largo del libro, señalamos la importancia del conocimiento práctico vinculado a la vida cotidiana y a las necesidades derivadas del vivir. Argumentamos que el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad han de favorecer la dimensión práctica del trabajo de matemáticas. Con todo, no podemos prescindir de la importancia del *pensar para pensar*. El trabajo de matemáticas ha de saber combinar valor práctico y valor intelectual. No basta con planificar actividades en base a su utilidad en la vida cotidiana. Las actividades propuestas en torno al tangram chino tienen una utilidad práctica dudosa. Su valor ha de buscarse en los procesos de pensamiento matemático que contribuyen a desarrollar.

De entre los que consideran adecuada la diferenciación entre conocimiento *teórico* y conocimiento *práctico*, hay quien argumenta que el *teórico* tiene más valor y quien dice lo contrario. No obstante, no tiene sentido clasificar los conocimientos por orden de importancia en función de su valor práctico. Una educación matemática de calidad ha de saber equilibrar diferentes tipos de conocimientos sin dedicar una atención exclusiva a un tipo concreto. Naturalmente, hay conocimientos matemáticos más necesarios que otros. En nuestra sociedad, viviríamos con dificultades si no conociéramos formas de calcular. En comparación con la composición de figuras con las piezas del tangram, el cálculo es un conocimiento necesario.

El carácter más bien contingente del conocimiento del tangram no debe llevar a excluirlo de nuestros objetivos prácticos. El carácter necesario del conocimiento del espacio requiere una mirada atenta a las actividades que faciliten el aprendizaje. Muchas actividades aparentemente poco prácticas han de ser interpretadas desde una doble vertiente. Por una parte, promueven el trabajo de procesos de pensamiento y, por otra, contribuyen a fundamentar conocimientos necesarios de una gran complejidad.

PROYECCIONES Y SECCIONES CON CUERPOS GEOMÉTRICOS[2]

➡ **¿Qué figuras se obtienen si proyectamos los siguientes cuerpos geométricos en una pantalla? ¿Y si los seccionamos?**



Figura 2.6. *Imágenes de cuerpos geométricos*

[2] La idea de la actividad fue introducida por los profesores Miquel Mallén y Pere Díaz, del grupo GAMAR.

Después de haber pensado más de un minuto...

Todo cuerpo geométrico tiene tres dimensiones (longitud, anchura y altura). Se pueden construir con plastilina, con barro... y algunos de ellos (los que tienen formas más conocidas) se pueden adquirir en comercios especializados. Con todo, está la opción de utilizar cajas de múltiples formas con las que se comercializan muchos alimentos (galletas, bombones, chocolate, etc.). Uno de los problemas de la educación en el ámbito escolar y, en particular, de la educación matemática es la desconexión entre el aula y la vida cotidiana. La educación matemática a menudo se olvida de ayudar a entender y resolver los problemas de la vida real. En cuanto al uso de materiales, se tiende a introducir materiales estructurados, generalmente clásicos como la colección de poliedros regulares. Hay que conocer los poliedros regulares, pero sería bueno introducir la manipulación de cuerpos geométricos habituales en la vida de los aprendices, como los representados en la Figura 2.6.

La selección anterior del ábaco, de las regletas y del tangram es una elección *clásica*. No podemos despreciar el gran valor educativo de estos materiales. La información que se adquiere y los procesos de pensamiento que se desarrollan por medio de la acción sobre materiales concretos son de gran importancia independientemente del tipo de materiales. No obstante, el descubrimiento de las matemáticas a partir de la manipulación de objetos familiares ha de repercutir en una mayor motivación e implicación de quien aprende. Dicen algunos educadores que el descubrimiento de matemáticas en objetos próximos queda registrado de manera más permanente en la memoria y de forma más gratificante. En cualquier caso, se debe considerar la necesidad de combinar el uso de materiales clásicos con otros objetos al alcance en el día a día. Por el hecho de haber tenido en cuenta la presencia de la vida cotidiana en los otros capítulos de este libro, nos hemos permitido la licencia de no equilibrar la ejemplificación de materiales estructurados y no estructurados.

Dicho esto, volvemos a la actividad planteada. Con la ayuda de un foco luminoso (proyector o linterna) se pueden manipular libremente los cuerpos escogidos y observar las sombras en la pantalla o en un papel blanco. Se pueden hacer sombras de un mismo cuerpo a distancias diferentes y se pueden reseguir. Saliendo a la calle, en un día soleado, se pueden recorrer sobre un papel las sombras surgidas de haber proyectado los cuerpos. Se observa un fenómeno matemático que tiene una explicación física: la distancia no afecta a la forma de las proyecciones, contrariamente a lo que pasaba con las sombras producto de la iluminación artificial. Otra actividad interesante es investigar por qué pasa eso.

La tabla de la Figura 2.7 recoge proyecciones de los principales cuerpos regulares. Se puede usar la ayuda de esta tabla a fin de estudiar las proyecciones de los distintos envases. Se podría hacer una tabla similar con los productos escogidos, utilizando los tres ejes básicos sobre cada cuerpo, el hori-

zontal, el vertical y el inclinado en 45º. Así, se pueden sacar conclusiones respecto de las figuras planas que surgen —cuadrado, rectángulo, triángulo, circunferencia, elipse, etc.— en función del cuerpo proyectado.

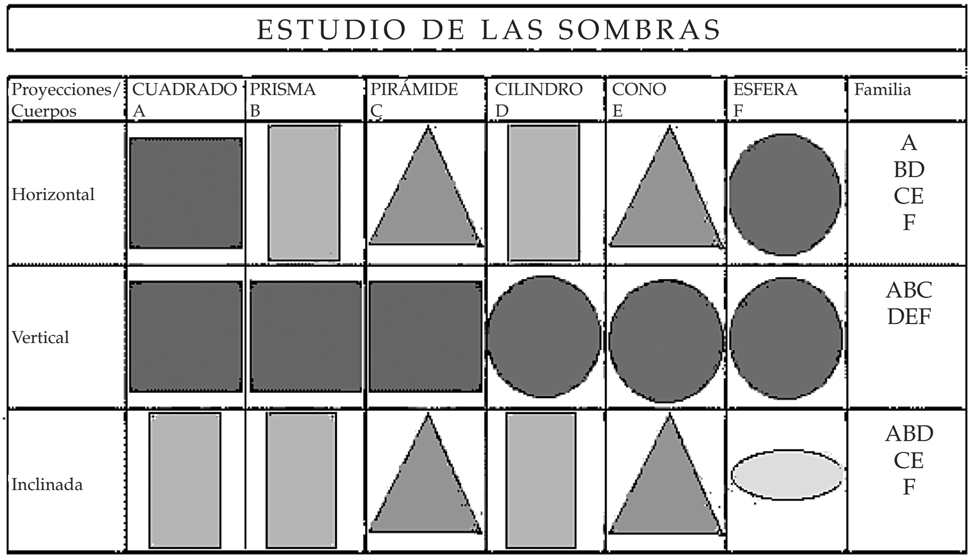


Figura 2.7. *Tabla clásica de proyecciones de cuerpos regulares*

De la observación de las diferentes sombras salen al menos dos conclusiones:

a) Se pueden hacer familias de cuerpos clasificándolos según las sombras producidas.
b) De ninguna figura, observando las tres proyecciones, salen sombras iguales.

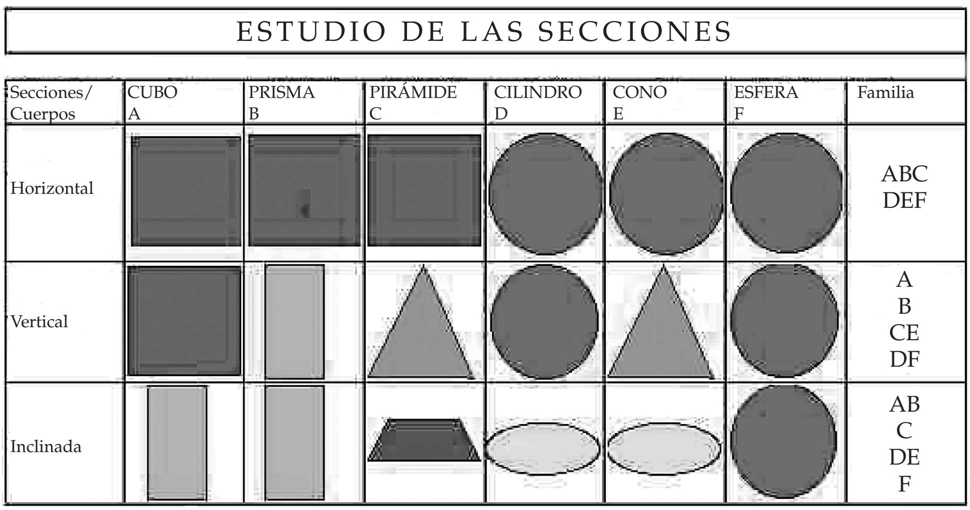
Si en lugar de proyectar, se secciona, no se puede usar cualquier cuerpo. Hay que usar cuerpos previamente construidos con barro o plastilina, por ejemplo. Para seccionarlos se puede usar hilo de pescar o un cuchillo. Así se observan las figuras planas que se pueden obtener dependiendo de la orientación del plano secante.

– *Las secciones de un cubo.* Si el plano secante es paralelo en una cara, queda cortado en dos paralelepípedos rectángulos y las secciones son cuadradas. Si el plano es perpendicular a una diagonal del cubo y se desplaza el plano de corte paralelamente a él mismo hacia el vértice más cercano, se obtienen triángulos equiláteros cada vez más pequeños. Si se despla-

za el plano paralelamente a él mismo, pero en sentido opuesto, se obtiene un hexágono regular.

– *Las secciones de un cilindro.* Si el plano que corta es perpendicular al eje del cilindro, la sección es un círculo. Si el plano secante no es paralelo al eje se obtiene una elipse. Si el plano secante es paralelo a la altura, se obtiene un rectángulo.
– *Las secciones de un prisma.* Si el plano secante es vertical, se obtienen secciones rectangulares. Si el plano secante corta todas las aristas verticales, se obtienen secciones poligonales que dependen del polígono del que sea la base.
– *Las secciones de una pirámide.* Si el plano secante es perpendicular en el eje, se obtiene un polígono parecido al de la base. Si el plano secante pasa por el eje de la pirámide, se obtiene un triángulo. Si el plano secante es cualquier otro, se obtiene un triángulo en la pirámide triangular y un trapecio en la cuadrangular.
– *Las secciones de un cono.* Si el plano secante es perpendicular al eje del cono, se obtiene una circunferencia. Si el plano secante es paralelo al eje del cono, se obtiene un triángulo. Si los planos secantes son de otro tipo, se obtiene una elipse, una parábola o una hipérbole.
– *Las secciones de una esfera.* Cualquier plano secante da una circunferencia.

A partir del estudio de las secciones, se pueden sacar diversas conclusiones. La tabla de la Figura 2.8. puede ayudar. De esta tabla se desprende, por ejemplo, que se pueden hacer familias de cuerpos clasificándolos en función de las secciones obtenidas; de ninguna figura, observando los tres



ESTUDIO DE LAS SECCIONES

Secciones/ Cuerpos	CUBO A	PRISMA B	PIRÁMIDE C	CILINDRO D	CONO E	ESFERA F	Familia
Horizontal							ABC DEF
Vertical							A B CE DF
Inclinada							AB C DE F

Figura 2.8. *Tabla clásica de secciones de cuerpos regulares*

planos secantes, se obtienen secciones iguales (excepto en el caso de la esfera).

Las actividades manipulables propuestas sirven para imaginar cuerpos geométricos en ausencia del objeto real; para ejercitar la visión geométrica teniendo en cuenta las propiedades proyectivas (punto de vista, direccionalidad...); para descubrir propiedades de los cuerpos tridimensionales a partir de la realización práctica de transformaciones, captando aquello que se mantiene y aquello que cambia; o bien para descubrir y comparar cuerpos tridimensionales a partir de sus sombras y proyecciones, estableciendo diversas categorías.

Las tablas de las Figuras 2.7. y 2.8. pertenecen a libros de texto contemporáneos a la obra de Estalella. La adaptación de estas tablas ha dado lugar a otras tablas habituales en los libros actuales. Muchos adultos tuvieron que aprender estas tablas de forma memorística dentro de los temarios escolares de geometría espacial. Somos conscientes de la necesidad de vigorizar la facultad de la memoria, pero hay muchas otras maneras de afirmarla. Propuestas de trabajo con envases de productos alimentarios, salir a la calle en un día soleado y hacer sombras, ejercitan la comprensión por delante del uso exclusivo de la memoria. Por medio de la experimentación, podemos llegar a construir nuestras propias tablas sin recurrir al sacrificio absurdo de memorizarlas.

LA MANIPULACIÓN DE MATERIALES EN LA OBRA DE ESTALELLA

El aprendizaje de las matemáticas y las ciencias a través de la acción directa con materiales manipulables es una constante en la obra de Josep Estalella. En *Ciencia Recreativa* se recoge un amplio abanico de experiencias donde el autor utiliza materiales como cerillas, monedas o figuras para ser recortadas o unidas. Recogemos algunas de las propuestas más representativas. Aunque son ejemplos que aportan una visión de la educación desde una perspectiva fundamentalmente escolar, es fácil imaginar el trabajo en un contexto no formal, en un rato de ocio. Como en cualquier actividad de ocio, es bueno dejar para más tarde la resolución de cualquiera de los problemas de Estalella cuando se empiecen a experimentar síntomas de fatiga, siempre y cuando recordemos retomarlos.

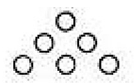
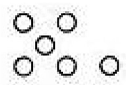
Los problemas con monedas, cerillas, etc. acostumbran a formar parte de lo que se denomina matemática recreativa. Para más ejemplos de actividades de este tipo, recomendamos la lectura de *Una recreación matemática*, del educador matemático Jordi Deulofeu (2004). La matemática recreativa a partir de la manipulación sencilla de materiales cotidianos es una manera de estimular la vertiente lúdica del trabajo propio de matemáticas. Dicen algunos autores que cuanto más se practica la matemática recreativa, más se puede apreciar su vertiente lúdica y más satisfacción produce. Con todo, a menudo cuesta creer que una práctica reflexiva, costosa en cuanto a tiempo y esfuerzo, pueda generar sentimientos de diversión y satisfacción. Pero la actividad matemática y la diversión no son realidades opuestas. Es cierto que una práctica reflexiva tien-

de a amortiguar las expresiones de satisfacción y placer. Acostumbramos a estar serios y concentrados cuando pensamos un problema de matemáticas, pero eso no impide que estemos experimentando satisfacción o que la podamos experimentar a medida que avanzamos en el proceso de resolución.

Sumandos repetidos. Monedas diversamente ordenadas

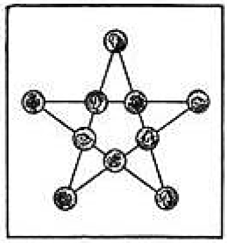
Estalella presenta diversas situaciones de carácter recreativo para suscitar la curiosidad por los números y sus relaciones. Desde una perspectiva más genérica, estas cuestiones son útiles para hacer un trabajo interdisciplinario entre los números, la aritmética y la geometría, dado que en todas ellas la posición que ocupan los números tiene un papel fundamental. Se trata de problemas especialmente interesantes porque sólo requieren conocimientos matemáticos elementales y no discriminan, por lo tanto, en función de la cantidad de educación matemática recibida. En todo caso, discriminan en función de la calidad de esta educación. Aquellas personas que no se hayan entrenado en el valor de la perseverancia y de la curiosidad, tendrán más dificultades para implicarse en estas actividades. En general, estamos ante situaciones que promueven el valor de *pensar para continuar pensando*. Hay quien dice que la *sustancia* de la actividad matemática es precisamente *pensar para continuar pensando*. Ni Estalella ni nosotros decimos tanto. Cualquier refinamiento de la actividad matemática ha de ser en beneficio, a corto o medio plazo, de una mejora de las condiciones del vivir. Una educación matemática para el ejercicio de una ciudadanía crítica ha de ser la primera condición de calidad, sin que esta condición excluya otras.

Las actividades originales de Estalella, junto con sus soluciones, son las siguientes:

> *¿Cómo se pueden disponer seis monedas de modo que formen tres líneas de a tres?*
>
>  *o bien* 
>
> *Distribuir simétricamente doce monedas sobre los cuatro lados de un cuadrado de las tres maneras siguientes:*
>
> *Primera: de modo que las monedas de cada lado sumen 4.*
> *Segunda: de modo que las monedas de cada lado sumen 5.*
> *Tercera: de modo que las monedas de cada lado sumen 6.*
> *Solución:*

Primera:			*Segunda:*			*Tercera:*	
1	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*3*	*3*
2		*2*	*1*		*1*		
1	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*3*	*3*

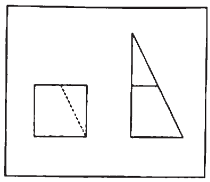
Distribuir diez monedas sobre cinco rectas, de manera que a cada recta le correspondan cuatro monedas.



Con diecisiete monedas fórmese una cruz, de manera que desde el pie hasta cada extremo se cuenten once monedas. Después suprímanse de ella dos monedas, de manera que a pesar de haberse reducido el total a 15, se tenga todavía una cruz y sigan contando once monedas desde el pie a cada uno de los extremos.

Transformaciones de figuras recortadas

Conversión de un cuadrado en un triángulo rectángulo.



Conversión de la cruz griega en un cuadrado, cortándola con dos tijeretazos rectilíneos.

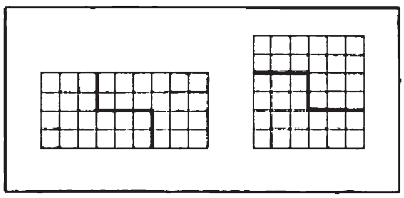


Fig. 41 Fig. 42

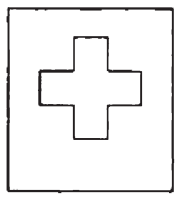


Fig. 43

Recortando un cuadrado de cartulina en la forma representada en la figura 46, y revueltas las seis piezas triangulares resultantes, recomponer el cuadrado.

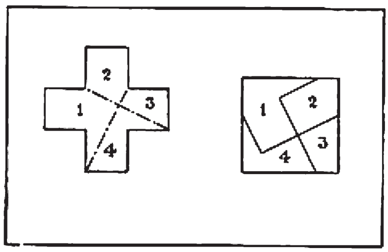


Fig. 44 Fig. 45

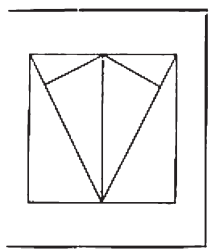


Fig. 46

Estalella presenta una magnífica colección de actividades que introducen una técnica muy recomendable para trabajar la geometría: la de cortar y construir figuras, muchas veces conocida como «hacer puzzles». Sólo se necesita papel y tijeras. Se puede descubrir cómo una misma superficie da juego para construir figuras de diversas formas, teniendo que analizarse los detalles al hacerlas y deshacerlas. Esta técnica ayuda a conocer las figuras más a fondo, de la misma manera que se conocen mejor los números componiéndolos y descomponiéndolos. Desde un punto de vista aun geométrico, esta colección de actividades promueve la exploración de relaciones entre forma y cantidad. En esta ocasión, la cantidad viene representada por el número de cuadrados con que se señalan las superficies de cada figura.

El aprendizaje de la geometría plana tradicionalmente se ha reducido al cálculo de perímetros y superficies. Esto ha hecho que los contenidos propiamente geométricos fueran sustituidos por contenidos aritméticos. La propuesta de Estalella es una apuesta consciente para la recuperación de los contenidos de geometría en el trabajo de la geometría. Aunque este juego de palabras pueda parecer paradójico, no lo es en absoluto dada la reducción del trabajo de geometría a la retención de conocimientos (la definición del apotema de un polígono, la relación entre radio y perímetro en una circunferencia, etc.) y a la aplicación de rutinas (el cálculo del área de un círculo, la longitud de un segmento, etc.). El uso de materiales es una buena manera de recuperar la comprensión de nociones y procedimientos geométricos.

La geometría de los palillos

Con doce palillos pueden construirse tres cuadrados: dispóngase como indica la figura 91. Trazada esta figura propóngase la siguiente cuestión: por el cambio de lugar de cuatro palillos convertir la figura en otra que comprenda cuatro cuadrados.

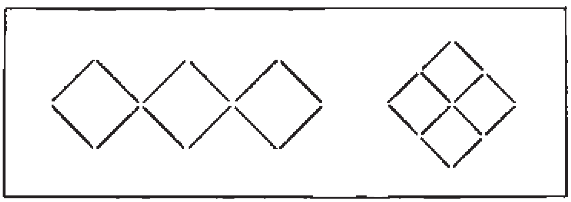


Fig. 91 Fig. 92

De la figura 92 ó 93 deben separarse dos palillos de modo que queden dos cuadrados.

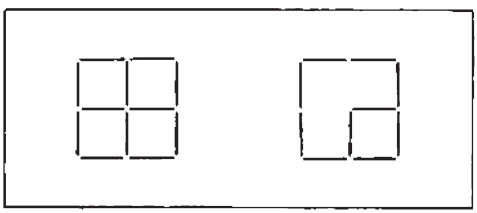


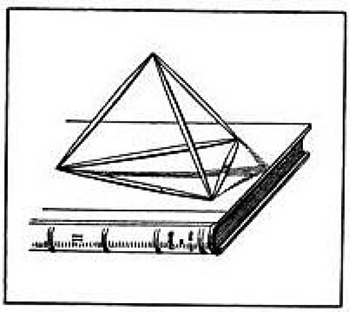
Fig. 93 Fig. 94

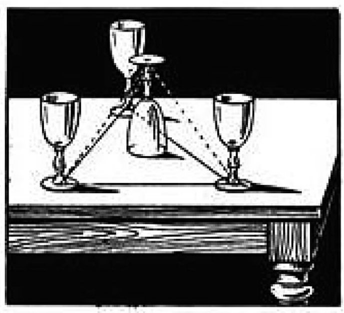
Estalella plantea la simulación de figuras poligonales a partir de construcciones con palillos, listones de madera u otros «bastoncillos», todos del mismo tamaño. Se trata de otra manera de hacer y deshacer figuras planas (en este caso únicamente polígonos) que se ha generalizado y se ha convertido en casi clásica entre las actividades lúdicas para trabajar la geometría. Su particularidad consiste en que no se tienen que cortar, separar o reunir figuras; se trata de moverlas, cambiarlas de posición y lugar, y a veces suprimir elementos usados en su construcción. Este trabajo ayuda a analizar los elementos de las figuras y a relacionar cambios de forma y movimientos. Al mismo tiempo, se practica la anticipación o imaginación de antemano de la figura que se quiere obtener, para poder decidir los cambios o movimientos de la transformación. Una vez se ha visto claro qué se quiere obtener y se ha decidido la acción, es habitual actuar por tanteo, comprobando y corrigiendo errores.

En general, son actividades que sólo requieren conocimientos matemáticos básicos. Por ejemplo, si se quiere saber cuántos palillos se necesitan para formar dos triángulos, basta con tener clara la noción de triángulo. La pregunta no es compleja desde la perspectiva de las nociones implicadas o las herramientas necesarias para resolverla. La complejidad radica en el hecho que lleva a pensar. La cuestión no admite una respuesta rutinaria, previamente aprendida. Se quiere que el aprendiz sea capaz de responder la pregunta, pero sobre todo que sea capaz de pensarla con atención.

El tetraedro

Construir, con seis palillos iguales, cuatro triángulos también iguales.
Colocar cuatro copas iguales de manera que los pies sean equidistantes.





La solución a la primera actividad se encuentra pensando en el espacio. No es posible realizarla pensando en el plano y, además, sería muy difícil imaginarla sin el material.

La segunda tarea, «colocar cuatro copas iguales de manera que los pies sean equidistantes», puede parecer similar a la primera pero hay diferencias.

En la primera actividad es fácil encontrar la posición de los cuatro palillos para formar un tetraedro. Sea cual sea la longitud, los tres palillos de la base tienen que formar un triángulo equilátero, y eso admite una sola manera posible; fijados estos tres, podremos encontrar la posición de los otros tres que se tienen que reunir arriba, también en un único punto posible. En cambio, en la actividad siguiente, si hacemos una lectura ligera, podríamos deducir que podemos poner las tres copas de la base a cualquier distancia las unas de las otras, mientras formen un triángulo equilátero; pero no es así ya que sólo hay una distancia posible a fin de que al poner la cuarta copa al revés obtengamos un tetraedro. Hace falta ir tanteando y viendo si las aristas laterales tienen la misma medida que las de la base.

La noción de tetraedro siempre es una buena excusa para practicar el arte de la construcción. Hacer con cartón un tetraedro es una actividad clásica, aparentemente sencilla, que necesita la manipulación con material. Hace falta disponer de cuatro triángulos equiláteros iguales y colocarlos en unas posiciones determinadas. Después de haber recortado cuatro triángulos y ponerlos en las posiciones que se consideran adecuadas, se acostumbra a comprobar que los lados no encajan ni los ángulos coinciden en los vértices. Hay que pensar cómo se pueden dibujar, recortar y colocar los triángulos de una manera esmerada. Hemos tenido alumnos que durante días se han ocupado de resolver este problema. Muchos de ellos eran alumnos de los llamados poco brillantes académicamente. Al no haber conseguido resolver el problema durante la sesión de clase destinada a esta actividad, quisieron continuar intentándolo fuera de la escuela, durante ratos de ocio. Tal como ellos mismos decían, cuando se sentían cansados, lo dejaban para el día siguiente. Cuando unos alumnos se interesan tanto en resolver un problema, sin haberse explicitado ninguna recompensa en forma de calificación positiva, hay alguna cosa que está funcionando muy bien.

Este planteamiento empírico de la geometría admite un conjunto infinito de posibilidades. Hace falta mucho ingenio para construir, con recortes de cartón, el octaedro, el dodecaedro o el icosaedro. Se puede empezar, si se quiere, por la construcción del cubo. El cubo truncado, el cubo de ángulos truncados y otros cuerpos geométricos modificados son opciones también válidas. Desde las ciencias naturales, se pueden considerar conocimientos de la mineralogía con el fin de construir cuerpos geométricos que representen metales y sales. Esta última es una actividad interdisciplinaria en sintonía con muchas de las propuestas de Estalella en su libro. Es muy diferente el conocimiento geométrico adquirido desde la experimentación y la manipulación en comparación con aquél adquirido exclusivamente en base a definiciones y listados de propiedades no descubiertas por uno mismo.

Acabamos este capítulo reivindicando de nuevo el uso de materiales en matemáticas, en todas las edades y en todos los contextos. Cuando en el año 2000 se celebró el Año Mundial de las Matemáticas, una de las actuaciones lle-

vadas a cabo fue la construcción de un icosaedro gigante como resultado de la colaboración entre varias personas. La actuación pretendía reproducir lo que Pedro Puig Adam, el gran didacta, hizo en el patio del Instituto de San Isidro de Madrid donde trabajaba. Así, Puig Adam quiso acercar las matemáticas a sus estudiantes. Estalella hizo acciones parecidas con sus estudiantes del Instituto-Escuela de Barcelona. A él también le gustaba *construir* las matemáticas. Insistimos una vez más en la necesidad de construir y vivir las matemáticas por medio de metodologías activas y en base a objetos.

El educador matemático Rafael Pérez-Gómez, en la defensa del proyecto «Materiales manipulativos para construir las matemáticas» (2001) dice que lo *prohibido* debería ser no usar materiales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como prácticamente lo es en los museos de ciencia de todo el mundo, donde la estrategia para captar visitantes es dejar tocar.

3

El juego

«El mundo lúdico de los niños es tan real e importante para ellos como para el adulto el mundo del trabajo y, como consecuencia, se le debería conceder la misma dignidad».

BRUNO BETTELHEIM (1994: 246)

LA TRADICIÓN FILOSÓFICA CLÁSICA señala la existencia de muchas tendencias simultáneas en una misma persona. En primer lugar, el *homo faber* trata siempre de concretar los pensamientos y llevarlos a cabo. El *homo sapiens* está dispuesto a abstraer y construir nuevos pensamientos. El *homo politicus* busca la libertad para él y su sociedad. El *homo religiosus* se centra en la experiencia de lo transcendente. Y finalmente, el *homo ludens* se divierte con la planificación y el desarrollo de acciones que no se ajustan a finalidades de supervivencia. En otras palabras, el *homo ludens* juega.

En su obra clásica *Homo Ludens*, el sociólogo holandés Johan Huizinga (2000) estudia el juego como fenómeno cultural, concibiéndolo como una función humana tan esencial como la reflexión y el trabajo. Considera el juego desde los supuestos del pensamiento científico-cultural y lo ubica como génesis y desarrollo de la cultura. Huizinga va más allá del lugar que corresponde al juego entre las demás manifestaciones de la cultura para indagar en qué grado la cultura misma ofrece un carácter de juego.

Jugar es un tipo de actividad necesaria para el desarrollo integral de las personas y, desde esta perspectiva, es intrínsecamente humana, aunque no exclusiva de nuestra especie. Todos hemos observado animales inmersos en actividades lúdicas. Los animales aprenden instintivamente, a través del juego, lo que necesitan para la vida: vigilar, cazar, atacar, defenderse, etc. Las personas también aprendemos a través del juego. ¿Nos hemos planteado alguna vez qué le pasaría a un niño si se le prohibiera jugar? ¿Cómo le afectaría a un niño vivir en un entorno familiar sin propuestas lúdicas? ¿Cómo reaccionaría un adolescente aficionado a jugar a baloncesto, si se le impidiera esta actividad? ¿Qué contratiempo ocasionaría a un adulto implicado en juegos de cartas donde ganar no sólo depende de la suerte, si estos juegos le fueran veta-

dos? ¿O cómo repercutiría en un abuelo amante de la petanca la supresión de este juego? En definitiva, ¿cómo sería el mundo sin el juego?

El juego es un placer en sí mismo, pero su mayor relevancia radica en el hecho de permitir resolver simbólicamente problemas y poner en práctica diferentes procesos mentales. En cada etapa de la vida, el juego tiene funciones específicas: durante la infancia, por ejemplo, el juego conecta fantasía y realidad. En términos genéricos podemos decir que las funciones principales del juego son favorecer el desarrollo intelectual, social y emocional de manera divertida, estimulante y motivadora. En cuanto al desarrollo social y emocional, el juego estimula la comunicación, el trabajo en equipo y la aceptación de normas, entre otras habilidades imprescindibles para el desarrollo intelectual.

Muchos investigadores han llevado a cabo estudios sobre el juego y su repercusión en el aprendizaje humano. Entre ellos destacan psicólogos que provienen del campo de la psicología infantil, como Jean Piaget, Bruno Bettelheim o Jerome Bruner; del psicoanálisis, como Donnald Winnicott; o de la psicología sociocultural, como Lev Vygotski. En el ámbito sociocultural y en relación al tema del juego, destaca especialmente Friedrich Fröbel.

Piaget (1982) concibe el juego como una actividad a través de la cual el niño realiza un proceso de adaptación a la realidad. Según este autor, en la actividad de juego se produce un desequilibrio entre procesos de asimilación (interiorización de la realidad en función de esquemas mentales y de acción propios) y procesos de acomodación (modificación de contenidos y esquemas mentales y de acción de acuerdo con la realidad), de manera que la asimilación adquiere más importancia que la acomodación. De ahí que el juego sea interpretado como una actividad eminentemente formativa.

En una línea similar, Bettelheim (1987), uno de los psicólogos infantiles más importantes de nuestro tiempo, define el juego como una actividad con contenido simbólico que el niño usa para resolver en un nivel inconsciente problemas que no puede resolver en la realidad. Por medio del juego, dice este autor, el niño adquiere una sensación de control que en la realidad está muy lejos de conseguir. Para Bruner (1988), el juego presenta elementos parecidos a la actividad de descubrimiento; en concreto, cuando el juego se orienta hacia la consecución de una finalidad que comporta una tarea creativa y deductiva, se produce necesariamente un aprendizaje de calidad.

Desde una visión psicoanalista, Winnicott (1993) argumenta que a través del juego se genera un espacio intermedio entre la realidad objetiva y la imaginaria, que permite realizar actividades que en la realidad no se podrían llevar a cabo. Vygotski (2003), desde un enfoque socioconstructivista del aprendizaje, matiza que este espacio supone una zona de desarrollo potencial de aprendizaje. Jugar, según Vygotski, facilita el conocimiento y el uso de los objetos, además del conocimiento de uno mismo y de los otros. Bettelheim y Winnicott resaltan la posibilidad de construir conocimiento por medio de dis-

tintos tipos de juegos, que agrupan en dos: los que denominan *game* (juego estructurado sometido a reglas) y *play* (juego libre).

Fröbel (1989) es conocido como el creador de la primera teoría pedagógica del juego. Este pedagogo prevé una educación mejorada en el interior de la familia a través del juego compartido entre adultos y niños. Más tarde, a inicios del siglo XIX, la teoría de los juegos, prevista en sus orígenes para ser aplicada dentro de la familia, se plantea fuera de ella. En las primeras edades, el juego por excelencia es de movimientos basados en carreras, danzas y representaciones. Otro tipo importante de juego es aquel que necesita materiales simples: pelotas, bolas, dados, bastones, etc. Fröbel también ilustra juegos de aplicación matemática con materiales más complejos: cajas con juegos de construcción y de montaje, dados desmontables con algunos seccionados por la diagonal, algunos paralelepípedos seccionados horizontalmente y otros verticalmente, etc. Con estas piezas, Fröbel recomienda la creación de lo que denomina «agrupaciones matemáticas» o «formas de conocimiento».

Tal como sugiere Fröbel, en el contexto de la educación matemática, el juego es un recurso válido para aprender matemáticas. En algunas edades —sobre todo durante la infancia— podemos afirmar que es un instrumento imprescindible, aunque el juego sea propio de cualquier edad y cultura. El educador matemático Alan Bishop, en base a la interpretación de estudios antropológicos, concluye que todas las culturas han desarrollado actividades relacionadas con las matemáticas y vinculadas a distintos grupos de edad: contar, localizar, medir, diseñar, *jugar* y explicar (Bishop, 1988).

El también educador matemático Miguel de Guzmán compara la manera de proceder en el juego y el procedimiento habitual en matemáticas. Hay maneras paralelas de actuar en el juego y en las matemáticas, como ya insinúa Bruner al afirmar que el juego en sí mismo constituye una actividad heurística, de descubrimiento. Con el propósito de poner de relieve los paralelismos, adaptamos ideas de Guzmán (1989) en el cuadro 3.1.

Un juego comienza con la introducción de reglas unidas a un número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita. En el cuadro 3.1. se aprecia que juegos y matemáticas comparten distintos procesos: en ambos casos es necesaria una comprensión inicial (del enunciado de un problema matemático, de las reglas de un juego), ha de producirse una búsqueda de estrategias (para resolver un problema y para ganar un juego, sobre todo si éste es competitivo) y han de aplicarse técnicas (en un juego han de aplicarse las normas y en un problema, por ejemplo, hacerse operaciones aritméticas para encontrar una solución).

Muchos juegos han sido fuente de ideas que actualmente se reconocen como parte central de las matemáticas, en especial dentro de los ámbitos de la probabilidad y la teoría de números. En la historia de las matemáticas son frecuentes las observaciones ingeniosas, hechas de forma lúdica, que han condu-

Procedimientos en el juego	Procedimientos en las matemáticas
El juego se inicia con la introducción de normas, que definen la función de los objetos y de las piezas que se usan.	Las matemáticas se inician con el establecimiento de definiciones y la concreción de objetos determinados por definiciones.
Jugar requiere adquirir familiaridad con las normas, relacionando unas piezas con otras.	Hacer matemáticas requiere comparar y hacer interactuar elementos de una teoría.
Avanzar en el dominio de un juego supone adoptar progresivamente técnicas sencillas que puedan dar buenos resultados.	Avanzar en la práctica matemática supone trabajar en torno a lemas deducidos de elementos básicos dados por la teoría.
Explorar un juego muestra procedimientos usados por otros jugadores avanzados, jugadas difíciles surgidas de una inspiración especial.	Explorar la práctica matemática da a conocer métodos y teoremas que se han ido gestando a lo largo de los siglos.
Examinar un juego «rico» lleva a descubrir problemas interesantes y a resolver situaciones inéditas.	Examinar una práctica matemática «rica» lleva a investigar problemas abiertos vinculados a complicaciones inesperadas.
Crear juegos nuevos, fértiles en ideas y situaciones complejas, da lugar a estrategias originales y a procedimientos innovadores.	Crear prácticas matemáticas nuevas da lugar a nuevas situaciones potencialmente motivadoras de nuevos modelos y teorías.

Cuadro 3.1. *Análisis comparativo de los procedimientos implicados en el juego y en las matemáticas*

cido a nuevas formas de pensamiento. En la antigüedad se puede citar el libro *I Ching* como origen del pensamiento combinatorio, y en tiempos más recientes se puede citar la influencia del juego en el pensamiento de Fibonacci, Cardano, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler y tantos otros. Guzmán (1989) reflexiona sobre dónde empieza el juego y dónde las matemáticas. Se trata de una pregunta con trampa que admite múltiples respuestas. Para muchos que la observan desde lejos, las matemáticas no tienen que ver con el juego. En cambio, para la mayoría de matemáticos profesionales, la matemática es un juego en sí misma, aunque pueda ser muchas otras cosas.

Los artículos del matemático Martin Gardner en su columna regular *Mathematical Games* de la revista *Scientific American*, publicados durante más de veinticinco años, son un buen ejemplo de relaciones entre juegos y pensamiento matemático. Los hexaflexágonos, los tetraflexágonos y las bandas de Möbius, entre otros objetos, se toman como puntos de partida en el planteamiento de juegos, algunos de ellos de gran complejidad. Hay incluso juegos que llegan a gene-

rar tal controversia entre los lectores de la revista que la sección de cartas queda colapsada. Muchos de los juegos, además, dan pie a problemas de gran interés, como por ejemplo: «¿Cuántas vueltas dará alrededor de su eje una rueda al rodar una vuelta completa sobre otra rueda fija de igual tamaño?». Gardner es, en este sentido, un gran conector de juegos y resolución de problemas.

En general, el juego aporta diversos beneficios en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, a pesar de la relevancia de este tema en la educación y la insistencia de expertos en la conveniencia de usar metodologías experimentales y lúdicas para favorecer el aprendizaje matemático comprensivo, la institución educativa se ha resistido en varias ocasiones a plantear de manera rigurosa la implantación del juego como recurso de aprendizaje, sobre todo a medida que niños y niñas se hacen mayores. Afortunadamente hay excepciones. Queda mucho camino por recorrer hasta que el juego sea un recurso plenamente aceptado y aprovechado en educación matemática. Una anécdota, ocurrida en el transcurso de una actividad de formación permanente a maestros de infantil y primaria, ilustra las dificultades para incluir el juego en el aula de matemáticas. Después de un asesoramiento sobre materiales manipulables y juego, una maestra valoró el curso así: «Le estoy muy agradecida por el curso. Todo lo que ha enseñado ha sido interesante. Pero yo tengo un libro de matemáticas pensado por un señor pedagogo que me resulta muy útil para dar clases. De momento tengo suficientes recursos y no necesito juegos».

Conviene dejar tiempo para que cada persona desarrolle un proceso de reflexión personal que le permita centrarse en lo que resulta adecuado en cuanto a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. El *Decálogo del juego en la clase de matemáticas* (Alsina, À., 2006) del Cuadro 3.2. expone argumentos para contribuir a este proceso de reflexión:

El decálogo pretende mostrar el carácter pedagógico del juego y, más concretamente, la necesidad de su uso en el aula de matemáticas. De todos modos, conviene considerar que el juego por sí mismo, sin intervención del adulto (padres, maestros, educadores, etc.), no es un requisito suficiente para producir aprendizajes, sean matemáticos o de otro tipo. El juego sin una rigurosa planificación puede ser ineficaz desde la perspectiva del aprendizaje matemático. Por otro lado, la calidad de la planificación ha de ir acompañada de un proceso previo de exploración de las posibilidades del juego. En esta línea, el educador Celso Antunes distingue entre juegos pedagógicos y juegos meramente lúdicos. De acuerdo con él, los juegos pedagógicos se desarrollan con la intención explícita de provocar un aprendizaje significativo, estimular la construcción de nuevos conocimientos y facilitar el desarrollo de habilidades lógicas y operacionales (Antunes, 2006). Cuando los juegos potencialmente pedagógicos no se han explorado ni planificado, pasan a tener un carácter sólo lúdico.

En este libro nos situamos en un enfoque pedagógico del juego y de su relación con las matemáticas. Asumimos que el juego ha de provocar un trabajo más motivador y estimulante para las personas que se inician en la actividad

1.	El juego es la parte de la vida más real de los niños. En tanto que recurso metodológico, traslada la realidad del niño a la escuela y muestra la necesidad y utilidad de aprender matemáticas.
2.	Las actividades lúdicas son enormemente motivadoras. Los aprendices se implican mucho en ellas y las asumen con seriedad.
3.	Trata diferentes tipos de conocimientos, habilidades y actitudes hacia las matemáticas.
4.	Los aprendices pueden afrontar contenidos matemáticos nuevos sin miedo al fracaso inicial.
5.	Permite aprender a partir del propio error y del error de los otros.
6.	Respeta la diversidad. Todos quieren jugar y todos pueden hacerlo según sus capacidades.
7.	Admite el desarrollo de capacidades psicológicas necesarias para el aprendizaje matemático, como la atención, la concentración, la percepción, la memoria, la búsqueda de estrategias, etc.
8.	Facilita el proceso de socialización y, a su vez, la autonomía personal.
9.	El currículo actual recomienda muy especialmente el aspecto lúdico de las matemáticas y la aproximación a la realidad de los niños.
10.	Persigue y consigue en muchas ocasiones el aprendizaje significativo.

Cuadro 3.2. *Decálogo del juego en la clase de matemáticas (Alsina, À., 2006)*

matemática formal. Antes, sin embargo, conviene que científicos y educadores repensemos el lugar que ha de ocupar el juego en la escuela y en el terreno familiar. Para repensar esta cuestión, resulta muy adecuada la reflexión de Guzmán (1984, p. 35): «Desafortunadamente para el desarrollo científico de nuestro país, la aportación española en el campo del juego y las matemáticas ha sido casi nula. Nuestros científicos y enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza, considerando innecesario cualquier intento de mezclar placer y deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que el espíritu del juego puede ser capaz de infundir en los estudiantes». Éste es uno de los retos de los que hablan Marchesi y Pérez (2004).

Sin duda, los juegos tienen un carácter de pasatiempo y diversión. Por ello, es comprensible que haya recelos en cuanto a su uso en la enseñanza. A pesar de ello, debe ampliarse la concepción de juego como sinónimo de ocio o pérdida de tiempo. En el aula de matemáticas, el juego lleva a la participación activa y a compartir conocimientos con los otros; ambas actividades son indispensable para la construcción de aprendizajes significativos. La riqueza del juego y sus potencialidades deben llevar a reflexionar sobre su empleo en el

aula de matemáticas, creando experiencias de aprendizaje lúdicas para enriquecer los procesos de pensamiento. Todo ello, como dice el antropólogo Winfried Böhm (1995), con el fin de *pedagogizar* el juego y no de *ludificar* sin sentido la pedagogía.

ACTIVIDADES HEURÍSTICAS CON JUEGOS

Hemos visto la importancia del juego en el desarrollo integral de las personas y en la adquisición de conocimientos matemáticos. También hemos esbozado relaciones entre juego y matemáticas. En concreto, una de las relaciones más estrechas tiene lugar en el campo de la resolución de problemas. Entendemos como problema una situación que comporta elementos desconocidos que necesitamos encontrar, y ante la cual no conocemos —todavía— un camino adecuado de resolución. Si conocemos previamente un método de resolución, ya no es un problema sino un ejercicio de aplicación. El juego casi comparte esta naturaleza (el «casi» depende del tipo de juego). En cualquier caso, un juego no es un ejercicio. Además, todos los juegos tienen elementos matemáticos, que deberíamos saber analizar. Juegos y problemas comportan enigmas y retos, y sobre todo contenidos procedimentales.

Es difícil seleccionar una única tipología de juegos. Algunos suelen llamarse juegos matemáticos, aunque esta denominación no es muy correcta porque excluye a otros juegos que también implican pensamiento matemático. Otros criterios de clasificación son:

– Juegos individuales o colectivos, con o sin finalidad social.
– Juegos de solución única o abiertos.
– Juegos de estrategia, de ingenio, de lógica, de adquisición de contenidos, etc.
– Juegos de cálculo, de probabilidad, de geometría, etc.
– Juegos de exterior —de patio, de parque, etc.—, o de interior —de mesa, de suelo, etc.

Hay muchas otras clasificaciones. Antunes (2006), por ejemplo, agrupa los tipos de juego en función de la inteligencia que supuestamente estimulan más en los participantes:

– Juegos para la inteligencia verbal o lingüística.
– Juegos para la inteligencia lógica-matemática.
– Juegos para la inteligencia espacial.
– Juegos para la inteligencia musical.
– Juegos para la inteligencia cinestésico-corporal y la motricidad.
– Juegos para la inteligencia naturalista.
– Juegos para la inteligencia pictórica.

De hecho, no se trata de clasificaciones porque un juego puede pertenecer a más de una categoría. El estímulo de la inteligencia lógico-matemática acostumbra a ir acompañada del estímulo de la inteligencia verbal; además, difícilmente se estimulará la inteligencia cinestésico-corporal sin el trabajo de la inteligencia espacial. Si hacemos una mirada cruzada a las distintas clasificaciones, vemos que podemos usar diferentes descriptores para profundizar en la naturaleza de un juego. Se puede decir de un juego que es de patio, de probabilidad, de ingenio, colectivo y especialmente facilitador de las inteligencias espacial y musical. En general, no es tan importante la clasificación escogida como ser conscientes de los procesos heurísticos involucrados en el uso de juegos —retención de información, comprensión de relaciones, anticipación de resultados, etc.— Cuantos más procesos heurísticos se activen, más interesante es el juego desde una perspectiva matemática. Algunos de estos procesos son:

– *Observar e interpretar elementos y objetos del entorno,* formular cómo son, qué hacen, si cambian, si van asociados a fenómenos interesantes, etc.
– *Manipular materiales y experimentar,* prestando especial atención a los aspectos matemáticos, ensayando, reconociendo posibles errores y rectificándolos.
– *Relacionar y operar,* es decir, pensar en qué observamos y hacemos, relacionando las distintas partes, combinando los datos y buscando estrategias de resolución.
– *Plantear interrogantes,* interesándose por buscar y encontrar nuevos conocimientos.
– *Expresar verbalmente* qué se ha hecho y qué se ha descubierto.
– *Interiorizar, imaginar y recordar* un conocimiento en forma de imagen.
– *Procesar la información,* comprenderla y asumirla, integrándola en la propia acción.
– *Adquirir alguna habilidad* o técnica en función de una información recibida.
– *Expresar con lenguaje matemático* qué se ha hecho, pensado y aprendido, para comunicar el conocimiento del mundo e interpretar el conocimiento de los otros.

Se dice de Albert Einstein que pasó su juventud sin encontrar el más mínimo placer en la consideración de problemas científicos porque había aprendido a aprender matemáticas aborreciéndolas. Poco antes de finalizar sus estudios en el *Harvard College*, empezó a disfrutar las matemáticas por medio de la implicación en juegos que compañeros de curso le plantearon. Tiempo más tarde, Einstein explicaría que aprendió las técnicas heurísticas de resolución de problemas a través de juegos. En este apartado mostramos juegos con contenidos matemáticos de cálculo, medida y lógica. Esta muestra ha de contribuir a contrastar experiencias personales sobre cómo se aprendieron las matemáticas en la escuela. Cada ejemplo ha de interpretarse desde una perspectiva

crítica, modificándose en función de los objetivos que se pretendan conseguir y del nivel de dificultad que se considere adecuado. Si algún juego provoca aburrimiento, deberá adaptarse hasta que suponga un reto. En realidad, la reformulación de las reglas de un juego ya es en sí misma un primer reto.

Juegos para practicar medidas

➡ ¿Cómo convertir juegos de práctica de medidas en retos matemáticos?

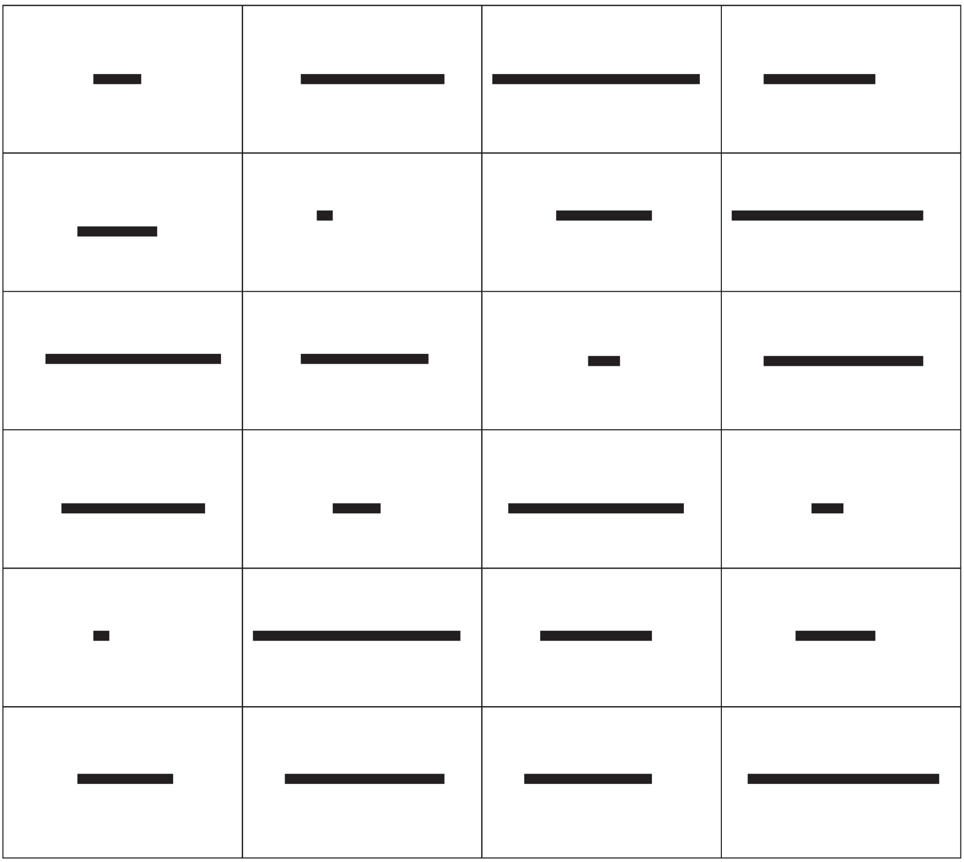


Figura 3.1. *Tarjetas para el desarrollo de un memory*

Después de haber pensado más de un minuto...

El aprendizaje de las medidas se ha desarrollado a menudo sin relación con la realidad, fuera de contexto y reducido al cálculo de unidades de medida. Sin

embargo, la medida se refiere al conocimiento de la realidad, no al de los números. Tiene relación con los números, pero porque se sirve de ellos para expresar el grado o intensidad con que se presentan aspectos físicos de la realidad que llamamos magnitudes. Las magnitudes pueden compararse por criterios de «más» o «menos», pueden aumentar o disminuir, es decir, son aspectos cuantitativos de la realidad; por ello pueden confrontarse con los números. Precisamente, la medida de una magnitud es el resultado de su confrontación con los números.

Cada magnitud va asociada a una cualidad de la realidad, apreciable por la experiencia directa y en relación con alguna noción física o geométrica. Si consideramos así las medidas y magnitudes, la enseñanza de la medida ha de partir inevitablemente de la observación del entorno inmediato, ha de contar con el conocimiento previo de nociones geométricas o de otros tipos correspondientes a las distintas magnitudes, ha de basarse en la observación y la experimentación, y ha de trabajar habilidades y técnicas propias. Sólo en algunos casos serán necesarios conocimientos numéricos y aritméticos.

Hay multitud de juegos para practicar medidas. Presentamos dos de ellos y pedimos que se piensen desde un punto de vista heurístico. Es importante que existan juegos para practicar conocimientos aprendidos de un modo más o menos rutinario. Pero estos juegos deberían poder pensarse de formas más complejas desde la perspectiva de los procesos de pensamiento involucrados. Cualquier aprendiz de matemáticas necesita información básica sobre la que pensar; en este sentido, los juegos para practicar medidas constituyen una manera lúdica de reconstruir la información básica aprendida sobre un ámbito específico de las matemáticas. El siguiente nivel de dificultad consiste en procesar la información básica para lograr una mayor comprensión de cuestiones donde esta información interviene de algún modo y debe ser relacionada. Se trata primero de retener para, más tarde, poder comprender.

El memory de longitudes

La plantilla de la Figura 3.1., compuesta por 24 tarjetas plastificadas que deberán recortarse, sirve para adaptar el juego de memory convencional, basado en establecer correspondencias haciendo parejas de tarjetas con una misma representación. El juego está pensado para dos o más jugadores, de los cuales gana quien consigue hacer más parejas. Las normas son:

- Colocar las 24 tarjetas giradas al revés, en un tablero de 6x4.
- Levantar, por turnos, dos tarjetas cada jugador; si son de la misma longitud, retener la pareja y volver a levantar dos tarjetas más; en caso contrario, ceder el turno.
- Conseguir más parejas que los otros jugadores para poder ganar.

Pueden plantearse otras actividades paralelas como ordenar tarjetas en función de la longitud, clasificarlas en dos o más grupos, etc. Una vez pensado el

primer nivel de dificultad, interesa reversionar este juego para que exija un mayor grado de comprensión de nociones involucradas en el tema de medida. En la versión actual del juego, se trabaja la medida desde un punto de vista cualitativo. Aquí, el reto principal consiste en retener representaciones geométricas de las longitudes y de su ubicación espacial en relación con las otras longitudes de las tarjetas durante un tiempo suficiente. En realidad, se trata de un trabajo básico de retención de información. Se exige la tarea de comparación, pero en un contexto donde las representaciones que deben compararse usan una misma forma lineal, con el mismo color e incluso con la misma posición horizontal.

Puede pensarse una versión más compleja del juego donde a cada jugador, cuando haya conseguido una pareja de longitudes equivalentes, se le pide que estime la medida de estas longitudes. Al final del juego, se comprueban las medidas exactas de cada longitud. Ganará quien obtenga una cantidad menor al sumar los errores en las distintas estimaciones. Ahora, el juego ya no se centra exclusivamente en la puesta en práctica de habilidades perceptivas y de establecimiento de correspondencias cualitativas. Por otra parte, admite preguntas más interesantes desde el punto de vista de los contenidos matemáticos tratados: ¿cómo sabemos que una cierta longitud mide 1cm?, ¿en qué comparación nos basamos?, ¿por qué habríamos de tomar el centímetro como unidad de medida en esta situación? Para responder estas cuestiones, no basta con haber retenido la percepción de las distintas longitudes; es fundamental que haya una comprensión de lo que significa medir y de las relaciones entre lo cualitativo y lo cuantitativo en el tema de la medida.

Hay otras maneras sencillas de reversionar el juego inicial para facilitar que haga pensar más a los jugadores. La segunda versión propuesta continúa no siendo un juego de estrategia puesto que no requiere una exploración en profundidad de la situación matemática. Una estrategia consiste en el desarrollo de un plan de actuación y de razonamiento a medio o largo plazo; en este caso el plan se reduce a dar respuesta a cuestiones abiertamente planteadas —¿cuál es la medida de esta longitud?, ¿cuál es el error en la estimación?, ¿cuál es la magnitud de acumulación del error?, etc.— Hay juegos con características específicas que requieren la búsqueda de estrategias por medio de planes sofisticados. Entre los juegos de retención de información y los juegos de estrategia, encontramos juegos que exigen un elevado grado de comprensión de relaciones entre conceptos pero que no plantean la resolución de una cuestión excesivamente compleja. La actividad heurística también es un rasgo fundamental de este tipo de juegos, a pesar de que las preguntas que vale la pena indagar ya vienen dadas.

«¿Quién tiene?… Yo tengo…»

Este juego es una adaptación del juego original del Grupo Alquerque de Sevilla, en el caso de la práctica de medidas de capacidad. Se necesitan 24 tar-

jetas plastificadas con una pregunta, además de botellas, graduadores, probetas y otros recipientes de plástico de distintas capacidades. El desarrollo es el siguiente:

- Repartir al azar una tarjeta plastificada a cada jugador.
- Repartir también al azar una bolsa a cada jugador con uno o más recipientes en su interior, de capacidades correspondientes a respuestas de tarjetas.
- Leer (un jugador al azar) la pregunta de su tarjeta y enseñar la respuesta quien la tenga en su bolsa; si hay más de una respuesta, gana el jugador más rápido en responder. En caso de que haya dudas, comprobar experimentalmente la medida.
- Seguir una cadena: el jugador que da la respuesta, lee la pregunta de su tarjeta.

Mostramos tres ejemplos de series de tarjetas con contenidos cada vez más complejos.

¿Quién tiene una botella de 1/4 l?	¿Quién tiene una botella de 1 l?	¿Quién tiene una botella de 1½ l?
¿Quién tiene una botella de 2 l?	¿Quién tiene una botella de 5 l?	¿Quién tiene una botella mayor que 1 l y menor que 2 l?
¿Quién tiene una botella menor que 1/2 l?	¿Quién tiene una botella mayor que 2 l?	¿Quién tiene 1 l uniendo dos botellas?
¿Quién tiene 3½ l uniendo dos botellas?	¿Quién tiene 4 l uniendo tres botellas?	¿Quién tiene tres botellas de 1/2 l si separa el líquido de una botella?
¿Quién tiene dos botellas de 1 l si separa el líquido de una botella?	¿Quién tiene un graduador que puede medir hasta 1 l?	¿Quién tiene un graduador que puede medir hasta 1/2 l?
¿Quién tiene un graduador que puede medir hasta 1/4 l?	¿Quién tiene dos botellas diferentes de 1 l cada una?	¿Quién tiene una botella menor que 1/4 l?
¿Quién tiene 6 l?	¿Quién tiene una botella con doble capacidad que una probeta de 1/2 l?	¿Quién tiene una botella con triple capacidad que una probeta de 1/2 l?
¿Quién tiene una botella con doble capacidad que una probeta de 1 l?	¿Quién tiene una botella con triple capacidad que una probeta de 1/4 l?	¿Quién tiene 4½ l?

¿Quién tiene una probeta de 125 ml?	¿Quién tiene una probeta de 100 ml?	¿Quién tiene una probeta de 50 ml?
¿Quién tiene una probeta de 15 ml?	¿Quién tiene una probeta de 5 ml?	¿Quién tiene una probeta de 1 ml?
¿Quién tiene 50 cl?	¿Quién tiene una botella mayor de 200 cl?	¿Quién tiene más de 5 l y menos de 1 dl?
¿Quién tiene 10 dl uniendo 2 botellas?	¿Quién tiene 30 dl uniendo 3 botellas?	¿Quién tiene 2 botellas de 50 cl si separa el líquido de una botella?
¿Quién tiene 2 botellas de 1.000 ml si separa el líquido de una botella?	¿Quién tiene 1 botella de 1.000 ml?	¿Quién tiene 1 botella de 250 ml?
¿Quién tiene 1 recipiente de 20 dl?	¿Quién tiene 1 recipiente de menor capacidad que la 10ª parte de 1 l?	¿Quién tiene 1 recipiente mayor que 100 cl y menor que 2 l?
¿Quién tiene una probeta 1.000 veces menor que 1 l?	¿Quién tiene 1 dl uniendo 5 botellas?	¿Quién tiene 1/2 dl uniendo 3 botellas?
¿Quién tiene 1/4 parte de 1 dl uniendo dos botellas?	¿Quién tiene 2 botellas de 1/2 dl?	¿Quién tiene una botella con el doble de 50 cl?

¿Quién tiene menos de 100 ml?	¿Quién tiene la 10ª parte de 1 hl?	¿Quién tiene entre 250 ml y 500 ml?
¿Quién tiene menos de 10 ml?	¿Quién tiene más de 50 cl y menos de 1 l?	¿Quién tiene el doble de la tercera parte de 750 cl?
¿Quién tiene 0,1 dl?	¿Quién tiene más de 200 cl?	¿Quién tiene 0,001 kl?
¿Quién tiene 10 dl uniendo dos botellas?	¿Quién tiene 1 dm^3?	¿Quién tiene 2 dm^3?
¿Quién tiene más de 4 dm^3?	¿Quién tiene menos de 1 dm^3?	¿Quién tiene una botella entre 250 ml y 10 dl?
¿Quién tiene una botella entre 20 dl y 30 dl?	¿Quién tiene una unidad equivalente a 1 l y 10 cl?	¿Quién tiene una unidad equivalente a 10 dl y 1 hl?
¿Quién tiene una probeta entre 1 ml y 15 ml?	¿Quién tiene una probeta entre 10 dl y 0,25 l?	¿Quién tiene 3,5 l?
¿Quién tiene menos de 1 cl?	¿Quién tiene más de 1 ml y menos de 100 cl?	¿Quién tiene 5 dl si une dos botellas?

Cuadro 3.3. *Tarjetas para jugar a «¿Quién tiene?… Yo tengo…»*

Animamos a pensar versiones más complejas de este juego. Una vez más insistimos en la necesidad de mantener, en cualquier educación matemática de calidad, la presencia regular de juegos simples de retención de información, en combinación con otros juegos —o versiones de los juegos anteriores— que demanden una mayor comprensión de relaciones entre conceptos y procedimientos. En esta combinación, también será necesario añadir juegos de estrategias, que ejemplificamos en la última sección de este apartado. De acuerdo con esto, más allá de las clasificaciones clásicas de tipos de juego que hemos documentado en este capítulo, recomendamos considerar una organización en tres tipos: juegos de retención de información, juegos de comprensión de relaciones y juegos de estrategia.

Juegos para practicar operaciones aritméticas

➡ ¿Cómo convertir juegos de práctica de operaciones en retos matemáticos?

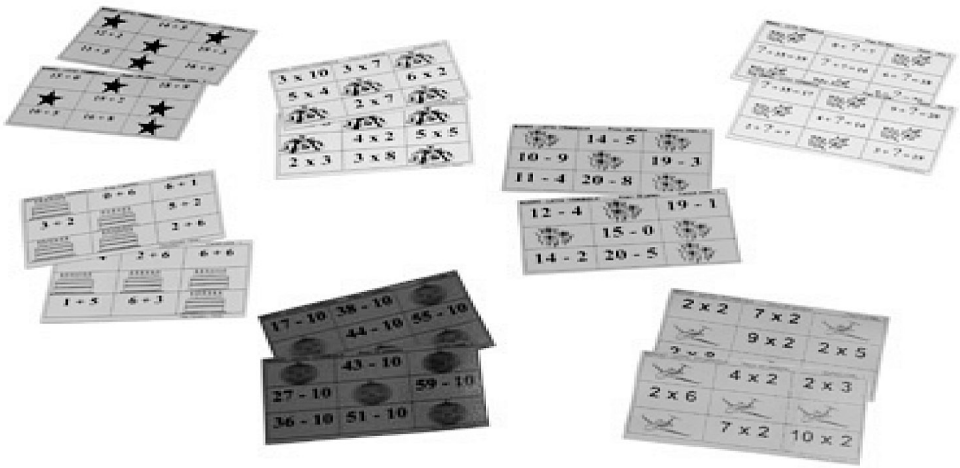


Figura 3.2. *Ejemplo de material pedagógico para el desarrollo de un juego*

Después de haber pensado más de un minuto...

La práctica de operaciones en sí misma no es el único elemento necesario para aprender cálculo. También conviene fomentar la comprensión y la funcionalidad de los aprendizajes. En esta línea, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2007) ha hecho una importante aportación introduciendo la noción de competencia, definida genéricamente como la capacidad de aplicar en diferentes contextos de la vida cotidiana lo

aprendido en la escuela. Los juegos que planteamos inciden, del mismo modo que un cuaderno de cálculo, en la práctica de operaciones, pero el medio es completamente diferente.

Proponemos al lector que primero se familiarice con estos juegos para que, más tarde, piense nuevas versiones de cada uno de ellos que requieran el planteamiento y desarrollo de procesos de pensamiento matemático complejos. Uno de nuestros supuestos en este capítulo es que cualquier juego admite ser reversionado hasta que facilite el trabajo de razonamientos no rutinarios. Hay juegos que por su propia descripción ya son plenamente heurísticos. Sin embargo, otros juegos se centran en la práctica de ciertos contenidos matemáticos y sólo se usan en este sentido. Cualquier juego es una buena oportunidad para plantear varios niveles de dificultad: recordar, describir, seleccionar, distinguir, comparar, inferir, especular, predecir, evaluar, etc. Sería conveniente que, a lo largo de las distintas etapas de desarrollo de una persona, se pusiera de relieve la flexibilidad de cualquier juego.

El bingo

El bingo es un juego muy conocido en el contexto lúdico de los adultos; en locales específicos, la dinámica del juego se centra en comprar cartones e intentar "llenarlos" antes que ningún otro jugador para conseguir un premio en metálico. No obstante, nuestra interpretación del bingo no tiene esta finalidad. Pretendemos usarlo desde un punto de vista estrictamente educativo y desde una mirada matemática. El bingo es un recurso lúdico válido para aprender a identificar números, hacer operaciones aritméticas y ejercitar el cálculo mental. Puede haber una cantidad de jugadores variable que necesitarán una bolsa con números, fichas y tarjetas (ver Figura 3.2). La dinámica es la siguiente:

- Repartir un cartón a cada jugador y un grupo de fichas o piedras para tapar los números.
- Poner los números que quieran trabajarse dentro de una bolsa e ir sacando al azar.
- Sacar un número de la bolsa y decirlo en voz alta; quien tenga en su cartón la operación con ese número como resultado que lo tape.
- Completar el cartón lo antes posible para ganar.

El juego tiene, como mínimo, tres posibilidades diferentes:

- Identificar cantidades: en las tarjetas hay dibujadas cantidades de elementos; se sacan números de una bolsa, y cuando se «canta» un número se tapa su cantidad con una ficha.
- Identificar números escritos: en el juego del bingo convencional, pueden construirse tarjetas para trabajar la identificación de números hasta el 10, el 25, etc.

– Identificar operaciones: en las tarjetas hay operaciones escritas (suma, resta, etc.); se «canta» un número y se busca en la tarjeta una operación con ese resultado.

Este bingo aporta mucha información sobre los números, ayuda a reconocerlos, a decirlos y a situarlos entre otros números, aprendiéndose una disposición de los números distinta a la habitual en la recta numérica. Con pocas variaciones pueden trabajarse otros aprendizajes como estrategias de cálculo mental. Para el trabajo del cálculo mental, algunos criterios son:

– Seleccionar las operaciones al azar, en función del nivel a trabajar.
– Seleccionar la cantidad de operaciones en cada cartón en función de las edades.
– Disponer de números u operaciones en función de criterios lógicos —por decenas, en orden ascendente, etc.—, para poder explorar cuáles son estos criterios en cada caso.
– Verbalizar, al acabar el juego, descubrimientos sobre numeración, orden, estrategias para resolver ciertas operaciones, etc.

Los contenidos matemáticos que se trabajan en las series de la Figura 3.2. son:

Serie	Contenidos matemáticos
Pasteles	• Adición: sumas de dos dígitos inferiores a 10. • Propiedad conmutativa. • Composición y descomposición de números.
Estrellas	• Adición: sumas donde el 1º es < 20 y el 2º > 10. • Propiedad conmutativa. • Composición y descomposición de números.
Flores	• Substracción: restas donde el 1º es < 20 y el 2º <10.
Hojas	• Substracción: restas donde el 1º < 60 y el 2º es 10. • La decena.
Calabazas	• Operaciones inversas de suma, con resultados inferiores a 10.
Aviones	• Producto: tabla de multiplicar del 2. • Propiedad conmutativa. • Elemento neutro.
Monedas	• Producto: tablas de multiplicar del 2, 3 y 5. • Propiedad conmutativa. • Elemento neutro.

Cuadro 3.4. *Posibles contenidos matemáticos a través del bingo*

En el caso del bingo, planteamos una versión donde hay elementos de reto matemático para quienes se estén iniciando en el lenguaje algebraico. Se trata de crear tarjetas de bingo de acuerdo a condiciones dadas. Por ejemplo, puede pedirse que cada cartón de bingo se elabore usando un único número, combinado por medio de operaciones aritméticas, para construir cantidades del 1 al 9. El cartón, usando sólo el número 2, podría ser:

$2 / 2$	2^2	$2^{(2 + (2 / 2))} - (2 / 2)$
$2^2 - 2$	$2^2 + (2 / 2)$	$2^{(2 + (2 / 2))}$
$2 + (2 / 2)$	$2^2 + 2$	$2^{(2 + (2 / 2))} + (2 / 2)$

De inmediato surgen cuestiones: ¿Hay alguna manera más regular y sencilla de representar los números del 1 al 9 sólo con el 2? ¿Hay alguna fórmula que indique cómo representar cualquier número natural sólo con el 2? ¿Cómo quedarán el resto de cartones? ¿Qué aspecto tendrá el cartón con los valores del 1 al 9 representados sólo con el 7? ¿Y sólo con el 8?

Los juegos que siguen —el ludocálculo, los crucigramas numéricos y los hexágonos— son fundamentalmente recursos para la práctica de operaciones. Tienen un nivel de dificultad, por tanto, vinculado al dominio de rutinas y algoritmos. Sin embargo, a partir de su descripción, es posible pensar actividades lúdicas que contengan un cierto grado de reto matemático. Dejamos para el lector la tarea de reversionar estas actividades. El nuevo nivel de dificultad ha de requirir un desafío intelectual mayor más allá de recordar las tablas de multiplicar y otros contenidos matemáticos de tipo memorístico.

El ludocálculo

Un ludocálculo es un juego de procedencia germánica que sirve para trabajar el cálculo mental. Se puede jugar individualmente, en pequeño o gran grupo. Se necesitan:

- 10 tarjetas para cada número del 1 al 9, de 5x3 cm aproximadamente y de color azul, por ejemplo.
- 1 tarjeta para cada número del 1 al 99, de color y forma diferente a las anteriores.
- 1 tablero en blanco con 90 casillas.

Se disponen, en el tablero y al azar, las 90 tarjetas azules con los números del 1 al 9. El primer jugador toma una tarjeta con forma redonda, por

ejemplo, del 1 al 99, también al azar. Se trata de conseguir números alineados en el tablero (fila, columna o diagonal) que operándolos den como resultado el número de la tarjeta redonda. El juego tiene muchas posibilidades, únicamente basta indicar cada vez el criterio de obtención del resultado:

– Con dos números alineados del tablero, aplicar una operación básica (suma, resta, multiplicación o división).
– Con tres números alineados del tablero, aplicar una operación básica.
– Con tres números alineados del tablero, aplicar operaciones combinadas.

Por ejemplo: Tarjeta redonda –> 24; Criterio a aplicar –> a × (b+c)

1	5	6	9	4	8	7	5	9
4	9	8	2	3	6	3	9	2
8	1	6	9	2	4	5	2	1
3	7	1	4	7	2	6	5	9
6	1	6	8	3	5	2	4	8
2	4	7	5	2	7	1	3	4
3	1	7	8	5	2	4	7	9
6	5	9	3	1	8	7	6	8
3	6	4	7	9	1	8	5	3

Una solución posible es 3 × (7+1) = 24

En todos los casos, pueden escribirse las distintas operaciones en la pizarra o en un cuaderno para dialogar sobre operaciones posibles que dan un mismo resultado. El primer jugador que encuentra el resultado correcto obtiene un punto y toma otra tarjeta de forma redonda. Cuando se acaban las tarjetas redondas, gana quien tiene más puntos.

Los crucigramas numéricos

1	2			3	4	
5			6			
		7				8
	9				10	
11				12		
13			14			15
		16			17	

HORIZONTALES	VERTICALES
1. El doble de 110.	**1.** Cinco veces 50.
3. 5 centenas, 6 decenas y 2 unidades.	**2.** La mitad de 44.
5. (10·5)+2.	**3.** 1000-207-260.
6. 1000-868.	**4.** Suma de los días de marzo y mayo.
7. 978 entre 6.	**6.** 16 decenas y 6 unidades.
9. Días de un año bisiesto.	**7.** El cuadrado de 13.
10. Horas de un día.	**8.** El cuadrado de 7 más el de 5.
11. 350+350+19.	**10.** 1/2 de 78 menos 1/3 de 54.
12. Repartir 729 entre 9.	**11.** El quíntuplo de 142.
13. Una quincena.	**12.** La novena parte de 801.
14. El cuadrado de 10 menos 11.	**14.** El cuadrado de 9.
16. Días de octubre.	**15.** La mitad del cuadrado de 8.
17. 9·8.	

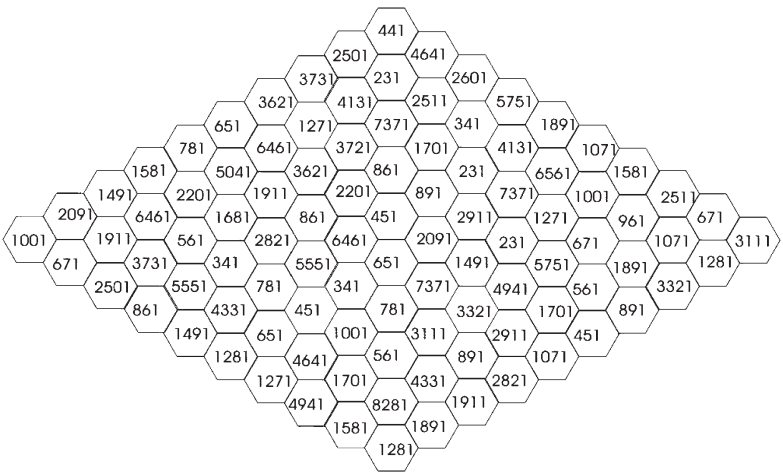
Este juego se inspira en las secciones de pasatiempos de diarios y revistas, y más concretamente, en los crucigramas, juegos de palabras basados en llenar los huecos de un casillero con letras, de manera que leídas en sentido horizontal o vertical, forman palabras de las cuales se da la definición o se sugiere el significado. En los crucigramas, letras y palabras se mezclan y cruzan hasta encajar entre las paredes de un cuadrado. La función de este pasatiempo es entretener pero también enseñar vocabulario. Algunos profesionales de la enseñanza fueron más allá del aprendizaje del lenguaje, y extrapolaron las

funciones de este juego en el aula de matemáticas; de ahí surgieron los crucigramas numéricos. Los más habituales, como el ejemplo que mostramos, se aplican para practicar operaciones, fomentar el cálculo mental o, de forma más genérica, desarrollar el sentido numérico.

Los hexágonos[1]

Se pretende que uno de los jugadores consiga una línea ininterrumpida de fichas que vaya de un lado del tablero al lado opuesto. La línea puede no ser recta. Se necesitan fichas de dos colores y una calculadora. También puede jugarse copiando la imagen en un programa de dibujo y pintando las casillas por turnos. Las reglas del juego son las siguientes:

– Por turnos, escoger dos números del grupo de números y decirlos en voz alta; se puede tomar el mismo número repetido.
– Multiplicar los números con calculadora; para cada jugador, situar una ficha de su color en la casilla con el resultado del producto, pudiéndose usar la calculadora una vez por turno.
– Si la casilla está ocupada, buscar otra con el mismo resultado; si no queda ninguna libre, no colocar la ficha y pasar el turno.
– Conseguir una línea continua que vaya de un lado a su opuesto para poder ganar; si se ocupan todas las casillas y ningún jugador completa la línea, no hay ganador.
– Grupo de números: 11 21 31 41 51 61 71 81 91



[1] La idea de la actividad fue introducida por el profesor Juan Emilio García, del CEP de Albacete.

Este juego requiere una cierta estrategia puesto que los multiplicandos deben escogerse teniendo en cuenta las casillas libres y necesarias para avanzar en la complementación de una línea. Cada jugador, por tanto, ha de anticipar el resultado de distintas multiplicaciones para garantizar un mayor éxito en la elección de los dos números que deberá multiplicar.

JUEGOS DE ESTRATEGIA PARA PENSAR

➨ ¿Cómo enfrentarse progresivamente a retos matemáticos?

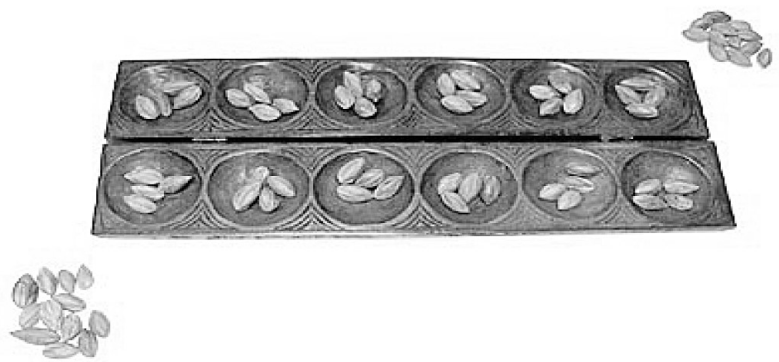


Figura 3.3. *Ejemplo de material para el desarrollo de un juego de estrategia (Awalé)*

Después de haber pensado más de un minuto…

Existen juegos, denominados de estrategia, que admiten distintos grados de comprensión a medida que los jugadores se familiarizan con ellos. Para iniciarse en la práctica de estos juegos basta con conocer las reglas básicas, disponer del material y del número de jugadores necesarios. Una vez conocidos a fondo y dominados, el jugador, probablemente por iniciativa propia, empezará a plantearse preguntas cuyas respuestas optimicen sus posibilidades de éxito. Un modo de enfrentarse progresivamente a retos matemáticos es, por tanto, partir de situaciones conocidas donde el aprendiz se sienta seguro. Cualquier juego de estrategia ha de ser primero un juego de práctica de reglas establecidas y, sólo más tarde, una situación problemática que deberá resolverse. Los tres juegos de estrategia seleccionados han de entenderse como el punto de partida hacia una implicación progresiva en retos matemáticos. Recomendamos primero la familiarización con los juegos y, a continuación, la identificación de dudas y dificultades en las que valga la pena pensar durante tiempo para poder mejorar el rendimiento como jugador.

El juego de la butifarra

Se usa una baraja española: 48 cartas clasificadas en 4 «palos» —oros, espadas, copas y bastos— y numeradas del 1 al 12. Las figuras de la baraja —sota, caballo y rey— corresponden a los números 10, 11 y 12. Hay cuatro participantes que, formando parejas, se sientan el uno frente al otro. No se puede hablar, ni enseñar las cartas, hacer señales o comentarios que indiquen qué cartas tenemos. El objetivo es conseguir 101 puntos antes que la pareja contraria. El valor de cada carta es: manilla (9), 5 puntos; as (1), 4 puntos; rey (12), 3 puntos; caballo (11), 2 puntos; sota (10), 1 punto; cartas del 2 al 8, 0 puntos; por baza ganada, 1 punto adicional.

Al final de cada mano, se cuentan los puntos que ha conseguido cada pareja. La que supere los 36 puntos, anota en su casillero la cantidad de puntos que pase de 36. Si ambas parejas consiguen 36 puntos en la mano, ninguna anota puntos. El valor de los puntos sumados se multiplica por 2 si la mano ha sido declarada *butifarra*, o bien por 2, 4 u 8 si ha habido un *contro*, un *recontro* o un *Sant Vicenç* (2, 3 ó 4 en algunas variantes geográficas).

Antes de jugar una partida, se decide qué jugador repartirá primero las cartas y elegirá triunfo. Para ello, uno de los jugadores atribuye un palo a cada jugador y, aleatoriamente, gira una carta de la baraja. Aquel jugador que tenía atribuido el palo de la carta girada, será el primero en repartir. Cuando ya sabemos quién es el primero, el que está situado a su izquierda mezcla las cartas y, una vez mezcladas, el compañero que reparte corta la baraja. En este punto, ya pueden repartirse las cartas, de cuatro en cuatro y empezando por el jugador que está a la derecha del que reparte, las cuatro siguientes al jugador que está a continuación y así sucesivamente, hasta acabar las 48 cartas, repartiendo 12 a cada jugador.

Una vez repartidas las cartas y antes de empezar a jugar, hace falta escoger triunfo. El jugador a quien corresponda escoger triunfo, y a la vista de las cartas que tiene en la mano, tendrá que escoger triunfo, o pasar el turno al compañero. Para poder indicar el triunfo que se ha escogido, hace falta decir en voz alta el palo correspondiente: oros, copas, espadas o bastos. El palo escogido es el que manda en la mano. También hay la opción de decir *butifarra*. En este caso no hay ningún palo que mande sobre los otros. En caso de pasar el turno al compañero, éste se ve obligado a hacer triunfo escogiendo una de las opciones anteriores —oros, copas, espadas, bastos o butifarra—. Si el triunfo escogido es *butifarra*, la cantidad de puntos que se apuntará la pareja ganadora de la mano será doble.

Una vez que se ha escogido triunfo, la pareja contraria puede *contrar*. Contrar significa que la pareja que gane esta mano, suma el doble de puntos, o el cuádruple si se hace butifarra. Para contrar, ha de decirse *contro*. Si no se quiere contrar, se dará un golpe con la mano sobre la mesa. Puede contrar cualquier jugador de la pareja que no ha hecho triunfo. Sólo se puede contrar una

vez en cada mano, es decir, si el compañero lo ha hecho, nosotros ya no podemos hacerlo. Cuando la mano está *contrada*, los componentes de la pareja a quien ha tocado repartir y hacer triunfo, pueden *recontrar*. Recontrar significa que la pareja que gane suma los puntos de la mano multiplicados por 4, o por 8 si es butifarra. Para *recontrar*, hay que decir *recontro*. Si no se quiere recontrar, se dará un golpe con la mano sobre la mesa. Puede recontrar cualquier jugador de la pareja que no ha *contrado*. Sólo se puede *recontrar* una vez en cada mano. Si la mano está recontrada y el triunfo no es *butifarra*, cualquier jugador de la pareja que ha contrado puede decir *Sant Vicenç*, en este caso los puntos se multiplican por 8. Si no se quiere hacer *Sant Vicenç,* se dará un golpe con la mano sobre la mesa.

Una vez escogido el triunfo, empieza la jugada. El primer jugador que tira una carta es quien está a la derecha de quien ha repartido y hecho triunfo, para lo cual, escoge una de las cartas que tiene en la mano y la deja ante sí sobre la mesa cara en alto. El resto de jugadores juega por orden contrario al de las agujas del reloj, hasta completar la baza. La pareja que gana la baza, recoge las cartas y las guarda cara abajo en un montón. El jugador que gane una baza empieza a jugar la siguiente carta. Sólo se puede matar la carta que empieza una baza con una carta de más valor de su mismo palo o con un triunfo. Tener fallo a un palo significa no tener cartas de ese palo. Tener semifallo significa tener sólo una carta del palo.

Una vez jugadas todas las cartas se cuentan los puntos de cada pareja; quien haya ganado la mano anota los puntos correspondientes. El jugador que ha repartido y escogido triunfo en una mano anterior es el encargado de mezclar las cartas, el de su izquierda de cortar la baraja, el de su derecha de repartir y escoger triunfo, y así sucesivamente. La partida se acaba cuando una de las parejas ha conseguido superar los 100 puntos. Únicamente hay obligación de matar las cartas de los contrarios, no las del compañero y siempre (si se dispone de ellas) hay que echar cartas del palo de salida. La estrategia principal consiste en pensar bien, antes de echar una carta, cuál es la opción más conveniente, puesto que una vez echada una carta ya no se puede rectificar. Las cartas jugadas han de situarse en un montón cara abajo. Cada pareja tendrá su montón, y sólo se podrá girar la última baza de cada montón para repasar qué cartas se han jugado.

Awalé

Se trata de un juego de reflexión de origen africano, fácil de aprender y útil para practicar cálculos de manera lúdica. Bastan quince minutos para aprender las reglas básicas y jugar, pero son necesarios muchos años para dominar las sutilidades. A medida que se progresa, entran en juego la memoria, el razonamiento y el análisis de estrategias. La Figura 3.3. muestra el material de madera con 12 agujeros (grupos de 6 en línea correspondientes al campo de cada

jugador) con 4 semillas o piedras dentro de cada agujero. Gana la partida quien logre capturar 25 o más semillas. Si cada jugador captura 24 semillas, hay empate.

A quien, por suerte, le corresponda empezar, debe tomar las semillas de cualquiera de los agujeros de su campo y depositarlas, una a una, en los agujeros siguientes y de manera consecutiva, y siempre hacia la derecha (en el campo propio) y hacia la izquierda (en el campo ajeno). La siembra puede acabar, con o sin captura, en el campo del contricante. En el turno del contrincante, también debe tomar las semillas de cualquier agujero de su campo y realizar su siembra, sin saltarse ningún agujero, y siguiendo el procedimiento anterior. Se pueden «mover» los granos de cualquier agujero, contenga uno, dos o más. En las primeras jugadas, se van tomando posiciones. Antes de realizar cualquier movimiento, debe estudiarse bien el campo del contrincante, procurando que la siembra llegue hasta aquellos agujeros donde sólo haya 1 ó 2 granos solitarios.

Si el último grano de la siembra ha caído en un agujero con sólo 1 ó 2 granos (con lo que son ya 2 ó 3), hay que capturarlos. Si a los 2, 3 ó 4 agujeros precedentes les pasa lo mismo, pueden capturarse sus granos. Se capturan granos si y sólo si, tras la siembra, en el agujero suman 2 ó 3 granos y si los agujeros se presentan de manera seguida o consecutiva.

Si en uno de los agujeros propios, un jugador acumula 12 o más granos, al dar la vuelta completa al tablero, deberá saltar el agujero de partida y seguir sembrando, pudiendo tal vez capturar algo en el campo del contrincante. Durante el juego no puede dejarse al contrincante sin granos, vaciando por ejemplo sus seis agujeros de un solo golpe. Si no hay más remedio, la partida se acaba y los granos restantes en el tablero son para el contrincante. Si la partida está avanzada y en un cierto momento se da la circunstancia de quedarse sin granos un jugador y no poder seguir jugando, el contrincante ha de suministrar al menos una semilla para poder proseguir. Pero si, como parte de su estrategia (no colocar granos en los últimos agujeros), el contrincante no puede ofrecer nada, se acaba la partida y las semillas que quedan en su campo son todas para él. Si sólo quedan en juego 2 ó 3 granos sin posibilidad de ser capturados por ningún jugador, es mejor dar por finalizada la partida. Si así ocurre, cada jugador se queda con los granos que todavía están en su campo.

Las torres de Hanoi

Se trata de un juego individual clásico y de estrategia para el trabajo de posiciones en el espacio. Se necesitan tres varillas en posición vertical, que simbolizan las tres torres, y siete anillas de diámetro decreciente, aunque existen variantes como por ejemplo la de la Figura 3.4. con cantidades diferentes de anillas.

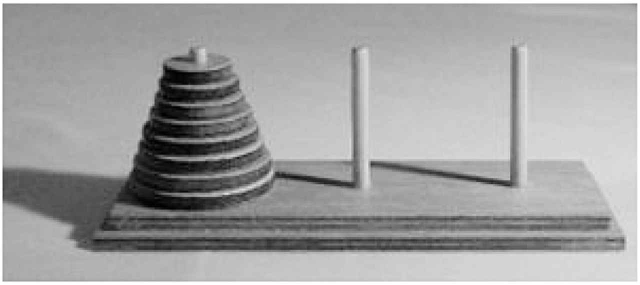


Figura 3.4.
Ejemplo de Torres de Hanoi

El objetivo consiste en pasar las anillas de una torre a otra de manera que al final queden en la misma posición que en la varilla inicial —en diámetro decreciente—. Hay varias normas que deben respetarse, como por ejemplo que en cada movimiento sólo puede moverse una anilla. Estas normas condicionan en gran medida la estrategia que permita completar el juego.

Existen varias formas de resolver este interesante problema. Para conseguir la solución más rápida, una estrategia consiste en mover en primer lugar la anilla más pequeña en todos los pasos impares. El problema se reduce a decidir en cada paso impar a qué torre irá el disco pequeño (inicial, auxiliar o destino). El algoritmo en cuestión depende del número de discos del problema: si inicialmente se tiene un número impar de discos, que es la forma más habitual, el primer movimiento debe ser colocar la anilla más pequeña en la torre destino, y en cada paso impar se mueve a la siguiente torre a su izquierda (o a la torre destino, si está en la torre origen). La secuencia es destino-auxiliar-origen, y así sucesivamente. Por el contrario, si inicialmente se dispone de un número par de anillas, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la torre auxiliar, y en cada paso impar moverlo a la siguiente torre a su derecha (o a la pila origen, si está en la torre destino). Ahora, la secuencia es auxiliar-destino-origen, y así sucesivamente. Si se pretende resolver el problema, encontramos varias curiosidades:

– La ficha n (siendo 1 la más pequeña) se mueve por primera vez en el paso 2^{n-1}, y después de ese primer movimiento, se moverá cada 2^n movimientos. De este modo, la ficha 1, se mueve en 1, 3, 5, 7, 9... La ficha 3, en 4, 12, 20, 28, 32...
– Todas las fichas impares (siendo 1 la más pequeña) se mueven siguiendo el mismo patrón. Asimismo, todas las fichas pares se mueven siguiendo el patrón inverso a las impares. Por ejemplo: si queremos mover un numero impar de piezas desde la columna 1 hasta la 3, sucederá lo siguiente: las fichas impares seguirán el patrón 1 →3 →2 →1 →3 →2 →1 →3 →2 →1 y las fichas pares seguirán el patrón 1 →2 →3 →1 →2 →3 →1 →2 →3.

Estos patrones de movimiento dependen únicamente del número de piezas. Si el número de piezas es par, los patrones de las impares serán los de las

pares, y viceversa. Por otra parte, uniendo la primera regla con la segunda, sabemos siempre qué pieza hay que mover y a qué columna hay que desplazarla. De este modo, el problema está resuelto. Su solución, por tanto, es rápida de calcular, pero el número de pasos para la resolución crece exponencialmente conforme aumenta el número de discos.

EL JUEGO EN LA OBRA DE ESTALELLA

Estalella (1918), en el prólogo de *Ciencia Recreativa*, advierte que no pretende exponer ideas trascendentales de la matemática ni de la ciencia; su objetivo es presentar actividades recreativas, especialmente entretenimientos. Cree que el juego es un recurso para acercar la ciencia y la matemática al público general, personas que sin estar especializadas tienen interés y dedican parte de su tiempo de ocio. También advierte que al tratarse de entretenimientos de sobremesa, probablemente no llamen la atención de los adultos; sin embargo, espera que los jóvenes se aficionen a este tipo de cuestiones lúdicas como un primer paso de una posible afición estable por las matemáticas. Estalella incluso plantea la necesidad de revisar los planes de estudio teniendo en cuenta la inclusión de lo que él denomina la matemática lúdica.

Compartimos sólo en parte el argumento de Estalella. No hay duda de que las actividades lúdicas despiertan la curiosidad de niños y jóvenes, pero —tal como demuestra el hecho de estar leyendo este libro— muchos adultos manifestamos un alto nivel de interés por actividades matemáticas presentadas en forma de juego, donde prevalece la curiosidad, la imaginación y el ingenio. Si bien es cierto que muchos adultos no valoran la instrucción científica y matemática como un recurso esencial en sus vidas, usan de forma autónoma conocimientos derivados de esta instrucción cuando se implican en ciertas actividades lúdicas. Las propuestas lúdicas de *Ciencia Recreativa*, algunas de las cuales reproducimos, ponen de relieve la actividad matemática creativa y estimulante como un fin en sí misma. Son una opción para experimentar la satisfacción que proporciona la indagación matemática.

Curiosidades de algunos números

> *El número 123456789 presenta esta notable propiedad: tomándolo como sustraendo del número 987654321, formado por las mismas cifras en orden inverso, da por resto el número 864197532, formado por las mismas cifras ordenadas de otra manera.*
>
> *El número 12345679, multiplicado por 9 da 111111111. Y como este último multiplicado por 2 da 222222222 y por 3 da 333333333, etc., tendremos que el número propuesto 123456789 multiplicado por 18 (que es igual a 9×2) dará*

222222222; multiplicado por 27 (que es 9×3) dará 333333333; multiplicado por 36 (que es 9×4) dará 444444444; por 45 (que es 9×5) dará 555555555; por 54 dará 666666666, etc.

El número 27, multiplicado por 3 (=3×1) da 111 siendo 1+1+1=3, multiplicado por 6 (=3×2) da 222 siendo 2+2+2=6, multiplicado por 9 (=3×3) da 333 siendo 3+3+3=9, y así sucesivamente.

El número 142857, mutiplicado por 2 da 285714, multiplicado por 3 da 428571, multiplicado por 4 da 571428, mutiplicado por 5 da 714285, mutiplicado por 6 da 857142, y todos estos productos están formados por las mismas cifras en el mismo orden circular.

Desde que Estalella describió estas y otras curiosidades numéricas hasta la actualidad, han aparecido varias publicaciones que recogen este tipo de cuestiones. Leyendo el libro original de Estalella, no podemos saber con exactitud si estas curiosidades son producto del espíritu investigador del autor o si forman parte de la cultura matemática de su entorno. En cualquier caso, la escuela actual ofrece pocas dosis de actividad investigadora en torno a actividades de este tipo, a pesar de ser esenciales en la formación de personas capaces de pensar por sí mismas.

A partir de los dos primeros ejemplos se puede plantear un problema más general, que consiste en calcular todos los números de hasta nueve cifras que se pueden formar con los nueve dígitos significativos, de manera que al multiplicarlos por un número de una sola cifra obtengamos un número formado sólo por unos. Puesto que x es divisor de 111...1 y los únicos posibles divisores de una cifra de este número son 3, 7 y 9, los posibles números son: 37×3=111, 37037×3=111111, 15873×7=111111, 3703703×3=111111111, 12345679×9=111111111.

A partir del tercer ejemplo se puede deducir que un múltiplo de 3 es siempre de la forma $3n$ (n = 1,2,3...). Cuando un número x multiplicado por 3 da un número tal que todas sus cifras son unos, entonces al multiplicar x por un múltiplo de 3 da un número tal que sus cifras suman 3 n. El último número que verifica esta propiedad es el 27, que es el último múltiplo de 3 que al multiplicarlo por 37 da un número de tres cifras.

¿Quién agotará la baraja?

Puesta la baraja en la mesa, dos individuos van tomando alternativamente cartas, con la condición de no tocar nunca más de seis: ¿quién se llevará la última carta?

Es evidente que podrá llevarse la carta 48ª el que se haya llevado la 41ª, pues su compañero, a partir de la 42ª se habrá podido llevar, cuanto más, hasta la 47ª, y el primero podrá siempre llevarse el resto. Pero a su vez, se podrá llevar la 41ª

> *el que se haya llevado la 34ª, y ésta la que se haya llevado la 27ª, y ésta el que se haya llevado la 20ª, y ésta la que se haya llevado la 13ª, y ésta el que se llevó la 6ª.*
>
> *Por consiguiente, si ambos jugadores están en el secreto, ganará el que empiece el juego, pues tomará las seis primeras cartas, y tendrá luego la facilidad de llevarse las cartas 13ª, 20ª, 27ª, 41ª y 48ª. Y si sólo uno de los jugadores está en el secreto, procurará seguir únicamente los últimos términos de la expresada serie.*
>
> *También en esta forma puede tener el juego muchas variantes cambiando el número de cartas que se permita tomar de una vez, y por consecuencia, variando también la serie.*

Esta cuestión continúa siendo de gran actualidad y utilidad: permite profundizar la comprensión de los números y las relaciones entre ellos, aspectos mencionados de forma recurrente por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), en la descripción de contenidos y procesos matemáticos que deberían conocer y ser capaces de usar los estudiantes del siglo XXI. Existe algún juego tradicional catalán, como por ejemplo «el juego del nim», con una estructura similar. Es un juego de estrategia para jugar en parejas, que consiste en colocar 12 piedras juntas en una fila. Empieza un jugador a sacar piedras, pudiendo sacar dos o una según quiera. Después es el turno del otro jugador, que hace la misma acción, y así sucesivamente. Pierde quien saca la última piedra.

Desde un punto de vista matemático, «el juego del nim» potencia la habilidad de experimentar y descubrir estrategias. Es un juego simple en cuanto a su mecánica pero bastante complejo en cuanto a los procesos de razonamiento que requiere y el descubrimiento de estrategias ganadoras. El proceso de aprendizaje puede dividirse en tres fases:

1. *Manipulación:* juego libre.
2. *Representación simbólica:* para ir descubriendo la ley interna, conviene organizar un registro de las acciones en una cuadrícula.
3. *Generalización:* del análisis del registro, deben extraerse conclusiones para descifrar la estrategia ganadora (se gana dejando 1, 4, 7 ó 10 piedras al oponente, es decir, $3n+1$).

A partir de aquí pueden sugerirse otras normas: «quien retira la última piedra, gana», «se toman 1, 2 ó 3, y pierde quien retire la última», etc.

Adivinar cuatro números

> *Dieciséis tarjetas numeradas se colocan sobre la mesa en cuatro series de cuatro tarjetas y se invita a una persona a fijarse en uno de los números y retener-*

lo en la memoria: sólo conviene que indique de cuál de las cuatro series forma parte (figura 2).

Seleccione las tarjetas al azar, pero en realidad siguiendo un orden, empezando por la primera de la serie I, y siguiendo con la serie de la II, segunda de la III; etc., y se vuelven a colocar en la mesa, dispuestas en otras cuatro series, de las cuales la primera está formada por las cuatro tarjetas primeras de las series anteriores, la segunda por las cuatro segundas, etc. (figura 3).

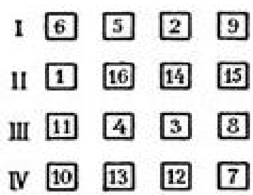


Fig. 2

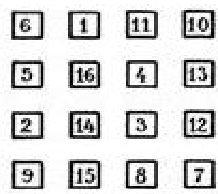


Fig. 3

La persona que haya retenido el número expresará cuál de las series lo comprende ahora, y claro está que el número en cuestión será el que ocupe, en la serie actualmente señalada, el lugar correspondiente al número de la serie primitiva. Así, si en la primera agrupación estaba el número en la segunda serie, y en la segunda agrupación en la cuarta, se tratará del mismo número que en esta cuarta serie ocupe el segundo lugar.

Estalella plantea una situación donde interesa el análisis de la posición de los números, no los números en sí mismos (como en el caso de los sudokus, entretenimientos de gran popularidad en los últimos tiempos). Sea cual sea el tipo de símbolo, conviene observar hechos relativos a la posición de estos símbolos: los símbolos de las diagonales son los mismos aunque cambiados de sentido en una de ellas, y los símbolos restantes están dispuestos en forma de espejo en relación con la diagonal.

Este mismo fenómeno trasladado al campo numérico ocurre con las tablas de multiplicar dispuestas en forma de tabla. Además de permitir observar propiedades de la operación de multiplicar como por ejemplo la conmutativa (3×2=2×3), llevar a cabo una investigación de las tablas de multiplicar, sobre todo si están representadas con regletas, facilita el descubrimiento de simetrías respecto a la diagonal, de la igualdad de medidas de algunos productos, o de la noción experimental del cuadrado de un número. Preguntas como las siguientes pueden ayudar a desarrollar pequeñas investigaciones: ¿en qué fila o columna hay productos de la familia del 5?; a primera vista, ¿qué producto da un resultado mayor, 3×5 o 4×2?; ¿cuál es el producto hecho con tres cuatros?; ¿dónde está el producto 4×5?; ¿en qué filas o columnas se encuentran todos los productos del tres?, ¿y del cuatro?, etc.

Juegos de pesas

> *¿Cuáles deben ser los valores mínimos de cuatro pesas para que por su combinación puedan formarse todos los números enteros de gramos comprendidos entre 1 g y 40 g?*
>
> *Observemos primero que con dos pesas tales como m y n pueden pesarse en la balanza cuatro cargas diferentes, a saber: m g; n g; (m-n) g; (m+n) g.*
>
> *Admitamos que la pesa menor es de 1g; con ella, sólo podremos pesar un gramo.*
>
> *Si la segunda pesa fuese de 2 g, su combinación con la primera sólo podría darnos el nuevo peso de 3 g, pues la diferencia 2-1=1 g, la da ya la primera pesa de 1 g. Luego no conviene adoptar la pesa igual a 2g, pues se dejaría aprovechar una combinación; en cambio adoptando la de 3 g podremos formar las siguientes combinaciones:*
>
> *1 g con la pesa de 1 g.*
> *3 g con la pesa de 4 g menos la pesa de 1 g.*
> *3 g con la pesa de 3 g.*
> *4 g con la pesa de 3 g más la pesa de 1 g.*
>
> *De la tercera pesa, podremos restar y sumar todas las combinaciones anteriores y por esto conviene elegirla de manera que restando de ella el valor máximo anterior (=4) se obtenga 5; restando 3, se obtenga 6; restando 2, se obtenga 7; restando 1, se obtenga 8, y restando 0, se obtenga 9; luego la tercera pesa será de 9g y con ella y las anteriores se obtendrá:*
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | *5 g = 9-4* | | *10 g = 9+1* |
> | *6 g = 9-3* | *9 g = 9 g* | *11 g = 10+1* |
> | *7 g = 9-2* | | *12 g = 11+1* |
> | *8 g = 9-1* | | *13 g = 12+1* |
>
> *De la siguiente pesa p′ se podrán restar sucesivamente todas las combinaciones anteriores, y así, para no desperdiciar ninguna, convendrá elegirla de manera que p′-13=14; p′-12=15; p′-11=16; p′-10=17; p′-9=18 ... hasta p′-1=26; p′=27, y esta pesa de 27 combinada con las combinaciones de las restantes, dará: 14g=27-13, 15g=27-12 ... hasta 26g=27-1; 27g=27g; 28g=27+1; 29g=27+2 ...hasta 40g=27+13.*

En esta ocasión el profesor Estalella presenta, en forma de juego, un problema de investigación que consiste en un caso particular del problema de «las pesadas con el menor número posible de pesas», donde podemos contar con cuatro pesas distintas. Se trata de un problema inicialmente planteado por Leonardo de Pisa en el siglo XIII. En este caso, en el que se parte de la posibilidad de usar operaciones de adición y sustracción para realizar diferentes combinaciones, los valores de las pesas son 1, 3, 9 y 27, que curiosamente son las cuatro primeras potencias de tres.

Desde un punto de vista genérico, el juego anterior junto con otros muchos problemas de investigación acostumbran a proponer la solución y comparación de dos o más situaciones parecidas, hasta llegar a descubrir y formular alguna ley general (proceso de generalización). Suelen existir muchos caminos distintos para llegar a plantear esta formulación general. Un camino válido es el tanteo, que es el que se nos presenta: a través de casos concretos y del pensamiento deductivo, se llega a la solución. Resulta evidente que todo ello constituye una preparación para el álgebra, con un importante componente lúdico.

Esta muestra de actividades, clásicas por su contenido, es de gran actualidad en relación a su propósito: mostrar el conocimiento matemático de forma divertida y motivadora. Para Estalella, es comprensible que jóvenes y adultos deserten del mundo de las matemáticas cuando éste se les presenta de forma rutinaria y aburrida. No podemos dejar de hacernos las mismas preguntas que Estalella: ¿es realmente buena la matemática actual para jóvenes y adultos?; ¿deberíamos aconsejar que toda persona desertara de unas determinadas matemáticas? En el ámbito de la matemática escolar en las etapas de escolarización obligatoria, ¿deberíamos revisar las pretensiones de utilidad? En su obra clásica, el pedagogo Paul Goodman (1964) duda de que una educación rutinaria y aburrida suponga un bien para alguien. En sus palabras, cualquier educación ha de tomar partido en favor de un sentido crítico de la vida por medio de actividades que puedan ser «disfrutables».

Otro gran pedagogo, John Dewey (1933), pionero en luchar por dar un lugar predominante a las ciencias y las matemáticas dentro del sistema escolar, explicó su decepción ante los resultados de la enseñanza de estas materias: lejos de contribuir a educar el pensamiento crítico en un ambiente relajado y estimulante, esta enseñanza se había convertido en algo pesado, aburrido y escolástico. Dewey llegó a decir que se había vulgarizado la actividad científica y matemática por medio de ejercicios y técnicas que apenas aportaban conocimiento y que ni siquiera resultaban placenteros.

4

La atención a la diversidad

«Desde el punto de vista del oriente del mundo, el día del occidente es noche. En la India, los que llevan luto visten de blanco. En la Europa antigua, el negro, color de la tierra fecunda, era el color de la vida».

EDUARDO GALEANO (1999: 61)

UN CUENTO MUY CONOCIDO del escritor Franz Kafka, *Comunidad*, refleja la hostilidad hacia lo extraño, lo que se distingue de la normalidad. En este cuento, Kafka explica la historia de un grupo de amigos que dejan de sentirse bien cuando a su *comunidad* llega, repentinamente, un extranjero. Todos los amigos confían en que el extranjero se marchará pronto de un lugar que no es el suyo, y suponen que eso les permitirá volver al orden y la calma que atribuyen a su grupo. Hasta que el extranjero no se va, se producen formas de violencia simbólica para que no se encuentre a gusto y no se plantee quedarse. Después de marcharse, el grupo deja de sentirse amenazado.

La educación matemática puede entenderse como una iniciación a una *comunidad* de significados y prácticas sociales. La diversidad de intereses, conocimientos, experiencias... dentro de todo grupo humano lleva a una diversidad de prácticas y, en particular, a una diversidad de prácticas matemáticas. Cada grupo participa en prácticas que son valoradas socialmente. Una actitud inclusiva es aquella que considera y valora los diferentes grupos y sus prácticas. Esta actitud es muy importante en un momento histórico donde la inmigración ha contribuido a hacer más obvia la multiculturalidad existente desde siempre entre nosotros.

Existe una primera multiculturalidad inmediata, visible en el patio de la escuela sin necesidad de conversar con los alumnos. Podemos intentar adivinar los países de procedencia de los alumnos o de sus familias viendo cómo visten, el color de su piel, cómo se agrupan entre ellos o qué toman de desayuno. La multiculturalidad dada por la inmigración convive con una multiculturalidad, a veces no visible de inmediato y que ha existido siempre bajo las denominaciones clásicas de *diversidad* y *heterogeneidad*. Se trata de una multiculturalidad que va mucho más allá de la diversidad lingüística (Unamuno, 2003).

En el caso de la educación matemática, donde tiende a dominar una cultura de la homogeneización, conviene desarrollar una fase de sensibilización simultánea a la promoción de actitudes inclusivas. Los años acumulados de fracaso en la escolarización de los gitanos (Sanromán, 1997), por ejemplo, deberían servir para cuestionar los beneficios de una educación matemática basada en programas de escolarización separada y diseñados en función de las necesidades de grupos socialmente favorecidos. Es ilustrativo el caso del chico gitano que, al llegar a una escuela nueva y ante una pregunta de la maestra, dijo la tabla de multiplicar del cinco de este modo:

$$5\times1 = 1;\ 5\times2 = 2;\ 5\times3 = 3;\ 5\times4 = 4;\ 5\times5 = 5;$$
$$5\times6 = 6;\ 5\times7 = 7;\ 5\times8 = 8;\ 5\times9 = 9;\ 5\times10 = 10.$$

Con el fin de entender mejor qué estaba pasando, la maestra le pidió que recitara la tabla de multiplicar del tres. El chico dio rápidamente los siguientes resultados:

$$3\times1 = 0;\ 3\times2 = 1;\ 3\times3 = 1;\ 3\times4 = 2;\ 3\times5 = 3;$$
$$3\times6 = 3;\ 3\times7 = 4;\ 3\times8 = 5;\ 3\times9 = 5;\ 3\times10 = 6.$$

Todos sus compañeros rieron. La maestra, seria, decidió aquel mismo día que era preciso enviar al chico al grupo de refuerzo durante las horas de clase de matemáticas. Meses más tarde, el chico continuaba multiplicando «mal», ante la desesperación del equipo de maestros. A final de curso, en una entrevista con miembros de la familia del alumno, la maestra, preocupada por conocer la cultura gitana, les preguntó si en casa practicaban las tablas de multiplicar con los hijos. La sorpresa vino cuando el padre del chico gitano recitó las tablas igual que su hijo. Finalmente, la maestra supo que aquella familia pensaba las cifras asociadas a dinero y usaba el duro —cinco de las antiguas pesetas— como la unidad. 5×1 era 1 porque 5×1 daba *un* duro. 3×1 era 0 porque el resultado no llegaba a *ningún* duro —sólo eran tres pesetas—. Fijadas estas condiciones, el conocimiento de las tablas de multiplicar era correcto.

Hace años, el educador matemático Paulus Gerdes, en una charla informal en los pasillos de un congreso, explicaba que no había conseguido retirar los libros de texto de matemáticas que se estaban usando en su país, Mozambique. Eran libros con enunciados de problemas que no tenían ningún sentido para los jóvenes de allí. Uno de los muchos ejemplos que puso hacía referencia a un enunciado donde salía un chico subiendo por una escalera mecánica en un centro comercial. Gerdes no entendía que se hubieran traducido y trasladado directamente libros europeos sin haberse revisado el contexto de los enunciados. Aquellos jóvenes de Mozambique no habían visto nunca escaleras mecánicas ni centros comerciales. Cuando Gerdes se dirigió a las autoridades competentes, vio claro que había que emprender acciones de sensibilización sobre la dimensión cultural de la educación matemática. No se podía

pedir a alguien que fuera inclusivo si antes no se le explicaba por qué no lo estaba siendo.

Los educadores matemáticos Marylin Frankenstein y Arthur Powell (1999) mencionan las enormes diferencias que pueden llegar a existir en la resolución de problemas en función del grupo cultural de pertenencia de los resolutores. A menudo Frankenstein explica el caso de unos antropólogos que se encontraban en África estudiando a los miembros de una tribu que habían calificado de primitiva. A fin de comprobar la inteligencia de acuerdo con su caracterización de este término, les pidieron la clasificación de veinte objetos que previamente los antropólogos habían distribuido en cuatro categorías: comida, ropa, herramientas de campo y herramientas de cocina. Los miembros de la tribu hicieron diez categorías y se consideró que no habían agrupado adecuadamente los objetos. Una de las agrupaciones fue una naranja y un cuchillo para cortarla. Los africanos explicaron que éstos serían los grupos que una persona sabia haría. Cuando se les preguntó qué grupos haría una persona no sabia, dieron la respuesta que los antropólogos esperaban.

Los ejemplos del chico gitano, de los jóvenes de Mozambique y de la tribu africana muestran la dimensión cultural de la educación matemática. La negación de esta dimensión es un auténtico obstáculo en la atención a la diversidad. El conocimiento matemático, entendido como una tecnología neutra en manos de unos cuantos, de difícil acceso para todo el mundo, no deja espacio al pensamiento divergente, a las alternativas de interpretación ni al reconocimiento de las diferencias. Cuando se dice que pensar matemáticamente es pensar con *la* razón, de forma estratégica y planificada, a menudo se asocia *la* razón a ciertos grupos por su condición social. Con esta identificación se justifica una educación matemática homogénea en una sociedad multicultural.

Predominan estereotipos en cuanto a las habilidades matemáticas de los grupos. Se acostumbra a decir de los chinos que tienen buenas habilidades aritméticas y de cálculo mental. De los marroquíes se dice que son capaces de desarrollar buenas habilidades geométricas. Hay grupos de los cuales no se destaca ninguna habilidad matemática, como el caso de los gitanos o de los dominicanos. De los pakistaníes a menudo se dice que son responsables y ordenados, sin mencionarse ninguna habilidad matemática. Y así, con otros grupos con representación en nuestro territorio. Los estereotipos se plantean abiertamente en conversaciones entre personas que opinan sobre lo que han oído opinar a otros. En este contexto, el aula de matemáticas multicultural se interpreta como una pérdida de oportunidades para todo el mundo.

El pedagogo Ronald Barnett (2001) dice de los estereotipos que son una solución fácil a preguntas complicadas. No se pueden asociar las mismas habilidades matemáticas o déficits a los miembros de un grupo porque dentro de él hay necesariamente diversidad de experiencias, así como diferencias en las formas de pensar y actuar. Lo que hace que unas personas pertenezcan a un mismo grupo cultural no siempre condiciona sus experiencias matemáticas y

ha de pensarse por separado de las formas de aprender y compartir los aprendizajes. En el aprendizaje matemático, la fuerza y la calidad de la relación que se establece con los otros tienen más influencia que cualquier pertenencia a un grupo.

En este libro, al hablar de *diversidad* nos referimos a la diversidad existente en todo contexto humano, que no ha de ser necesariamente de tipo étnico, como se verá a lo largo de este capítulo. Un caso particular es la diversidad cultural. Existen otros, sin embargo. Los estilos de aprendizaje marcan un tipo de diversidad importante. Hay personas más orientadas a tareas no vinculadas directamente con materias académicas. Otras personas prefieren evitar tareas repetitivas y poco estimulantes. Por contra, hay quien se interesa por persistir en tareas con escasa estimulación. Todas estas personas han de enfrentarse a situaciones que llevan al trabajo de las matemáticas. La forma de enfrentarse a ellas está asociada a los estilos de aprendizaje. No responderá igual alguien que tiende a percibir la información como parte de una panorámica global, que alguien con predisposición a separar la información y a estudiar los detalles.

Con todo, la diversidad no puede reducirse a diferencias en los estilos de aprendizaje, ni ha de pensarse principalmente desde esta perspectiva. La diversidad no es una simple cuestión de preferencias, características individuales o condicionantes culturales. Hay un referente social que debe tenerse en cuenta. Cuando se contrapone la diversidad a la normalidad, se da poder al grupo mayoritario y se pide a los otros grupos que se ajusten a las normas reconocidas en el contexto donde se los valora. Esta situación es plenamente social. La asignación de déficits en grupos que se alejan de la normalidad también es una cuestión surgida de un entorno social. El sociólogo Rafael Feito (2002) habla de la individualización de la diversidad. Se habla de la diversidad como de una propiedad de cada persona —el alumno «diferente»—, sin verse como un fenómeno social.

John Dewey, pedagogo preocupado por cuestiones de inclusión y escuela, hablaba a principios del siglo XX de la necesidad de integrar las prácticas de todos los grupos y democratizar su acceso. En *Democràcia i escola* (1994), Dewey explica que el aprendizaje surge de la reconstrucción de nuestra experiencia desde el intercambio con otras experiencias. Para este autor, el mejor recurso con que puede contar una escuela es la asistencia de alumnos con bagajes diferentes dado el valor educativo de la diversidad y sus posibilidades en cuanto a la acción pedagógica. Una escuela que anima al individualismo y la memorización difícilmente considerará los principios de atención a la diversidad ni tampoco valorará la diversidad como un recurso. Con la terminología actual, diríamos que Dewey apuesta por la *escuela multicultural*.

Desde un punto de vista social, el tema de la diversidad es muy complejo, entre otras cosas porque se ha ido construyendo una opinión pública contraria a la escuela multicultural, con respuestas institucionales basadas en siste-

mas de organización de aulas que legitiman esta opinión. De un modo más general, nos encontramos en una sociedad multicultural que lleva a situaciones de conflicto cuando los grupos se disputan la dominancia de sus valores culturales. En los inicios de esta década se han llegado a publicar libros que han tenido que reeditarse después de su éxito, donde se argumenta la dificultad de educar en un entorno excesivamente diverso. Son libros que aportan la experiencia personal del autor, que acostumbra a ser profesor de enseñanza secundaria desde hace años. Algunos están escritos con registro novelístico, como es el caso del libro de Toni Sala, *Crónica de un profesor en secundaria: El mundo de la enseñanza desde dentro* (2001).

En estudios anteriores (Planas, 2006) hemos encontrado a muchos educadores que comparten la idea de que las matemáticas son las mismas para todo el mundo. La única diferencia cultural que se acostumbra a destacar es la lingüística, aunque se argumenta que las técnicas matemáticas admiten un aprendizaje poco mediado por la lengua. Se ponen ejemplos asociados al trabajo con polinomios y ecuaciones, la construcción de los números reales, el uso de gráficos y funciones, etc., sin mencionarse ambientes de resolución de problemas ni formas de comunicación de la actividad matemática. Recientemente, en un curso de formación permanente con un grupo de educadores matemáticos, después de introducir el tema de la diversidad en el aula de matemáticas por medio de diferencias en los procesos de resolución de un problema, tuvo lugar la siguiente conversación entre dos profesores:

Profesor: Siempre es bueno tener más de una forma de resolver un problema.

Profesora: A mí lo que me preocupa es el momento de evaluar. ¿Cómo podemos saber en qué grado una resolución es mejor que otra?

Profesor: Tú piensa en cómo lo harías tú, que eres el experto, y sabrás qué resolución se parece más a tu modo de hacer.

Esta anécdota muestra la asociación de la «normalidad» con la cultura matemática del profesor. Desde esta identificación, es difícil que lleguen a mostrarse otras formas de hacer matemáticas. La superación de la homogeneización de la cultura matemática y una atención a la diversidad de calidad requieren la revisión de los criterios de evaluación más tradicionales y la introducción de principios de manipulación, juego y pensamiento crítico. En particular, Dewey remite a elementos del pensamiento crítico. Aunque no habla del caso de la educación matemática, su defensa de los principios de intercambio y diálogo es adecuada en cualquier entorno de resolución de problemas.

Paulo Freire, otro gran pedagogo del siglo XX, destaca la imposibilidad de construir conocimiento con una única cultura de referencia y de forma aislada. Freire habla del conocimiento que toda persona ha desarrollado y de la necesidad de establecer puentes entre personas con el fin de compartir e intercambiar ideas. Resulta sugerente una conversación entre Freire y un grupo de campesinos (Freire, 1994, p. 45), a raíz de una situación inicial donde los cam-

pesinos dicen de ellos mismos que no «saben». Creen que pensar y conocer son actividades propias de un mundo distinto al suyo. Freire les demuestra que ellos también saben del siguiente modo:

> Primera pregunta:
> —¿Qué significa la mayéutica socrática?
> Risa general y yo registro mi primer gol.
> —Ahora les toca a ustedes hacerme una pregunta, dije.
> Hubo un cuchicheo y uno de ellos hizo la pregunta:
> —¿Qué es una curva de nivel?
> No supe responder, y registré uno a uno.
> —¿Cuál es la importancia de Hegel en el pensamiento de Marx?
> Dos a uno.
> —¿Para qué sirve el enrejado del suelo?
> Dos a dos.
> —¿Qué es un verbo intransitivo?
> Tres a dos.
> —¿Qué relación hay entre la curva de nivel y la erosión?
> Tres a tres.
> —¿Qué significa epistemología?
> Cuatro a tres.
> —¿Qué es un abono verde?
> Cuatro a cuatro.

Todos somos interlocutores matemáticos, pero no todos hemos aprendido a partir de las mismas prácticas, en parte debido a que no todos hemos sentido la necesidad de construir los mismos conocimientos. Conviene comprobar qué sabemos, al mismo tiempo que comprobamos qué saben los demás. Algunos de nosotros pensamos el ángulo, por ejemplo, como un espacio delimitado por dos líneas rectas que se cortan. Otras personas con otras trayectorias vitales piensan el ángulo como un espacio físico marcado por un sector circular definido por una circunferencia. Son significados complementarios y cada uno tiene sentido en un entorno cultural y social específico. Freire no piensa en el enrejado del suelo porque no ha tenido necesidad de hacerlo, mientras que los campesinos no han tenido necesidad de explorar qué es la mayéutica socrática. Todos ellos saben, pero saben contenidos distintos.

EPISODIOS PARA DESCUBRIR DIVERSIDADES MATEMÁTICAS

En los capítulos anteriores hemos aportado actividades ricas para el trabajo con las matemáticas. En este capítulo consideramos básica la tarea de sensibilización en cuanto a la dimensión cultural de la práctica matemática. Los

episodios que describimos han de contribuir a hacer más visible esta dimensión. Antes, sin embargo, comentamos brevemente aspectos que un enfoque intercultural del currículo ha de tener en cuenta. Para un estudio más detallado de la idea de *currículo intercultural* recomendamos la lectura de los informes de la Comisión Europea sobre la escolarización de alumnado inmigrante, en particular el informe liderado por la Red Eurydice en el año 2004, *La integración escolar del alumnado inmigrante en Europa*.

En muchos países europeos, los currículos oficiales dan prioridad al enfoque intercultural. La concreción de este enfoque se plantea de forma transversal, por medio de capacidades, materias y valores que han de desarrollarse a lo largo de cada etapa escolar de forma integrada en materias específicas. De acuerdo con la Red Eurydice (2004), diversos países han identificado materias desde donde supuestamente debería ser más fácil articular un enfoque intercultural. Las ciencias sociales se interpretan como un buen hilo conductor de una reestructuración curricular que incluya la atención a la diversidad cultural. En las clases de historia se sugiere el planteamiento de debates con alumnos de distintos países, mientras que en las clases de lengua se habla de la lectura de textos escritos en las lenguas representadas en el aula. En las educaciones física y musical, se sugiere respectivamente el trabajo de juegos tradicionales y músicas del mundo. No existe, sin embargo, ningún país donde se considere la necesidad de introducir la variable intercultural en el currículo de matemáticas.

Actualmente las medidas iniciadas en cuanto a la formación inicial y permanente del profesorado en muchos países han de contribuir a mejorar la situación de invisibilización de la dimensión cultural de las matemáticas. En muchas universidades, los educadores en formación empiezan a recibir cursos de didáctica de la matemática donde se incluyen referencias a la dimensión cultural (Planas y Alsina, À., 2007). Además, muchas de estas universidades han emprendido postgrados de especialización en educación intercultural donde uno de los contenidos es la interculturalidad en relación con las matemáticas. En el conjunto del territorio estatal, los esfuerzos cada vez son mayores y más extendidos.

En el aula de matemáticas, o en cualquier contexto no formal de práctica matemática, el enfoque intercultural ha de entenderse como una opción amplia con connotaciones sociales en cuanto a comportamiento y actuaciones. En principio hay que tener expectativas elevadas de todos los interlocutores. Las experiencias e intereses de personas de entornos diferentes no han de usarse como argumento en la valoración negativa de sus prácticas. Es preciso un enfoque plenamente social y actitudinal que asocie la atención a la dimensión cultural de las matemáticas con la atención a las identidades culturales de las personas y sus grupos de pertenencia.

En Planas (2003) se argumenta la necesidad de no reducir la atención a la diversidad a la elaboración de materiales didácticos ni en la organización de prácticas compensatorias. La educación matemática intercultural no pasa por diseñar materiales, juegos o actividades «críticas» concretas para grupos de

alumnos ni por la escolarización separada. Cualquier material, juego o actividad «crítica» es una situación de trabajo intercultural si se gestiona de modo que todo el mundo tenga acceso a él por igual. Tener acceso no significa sólo que el enunciado o las reglas del juego estén traducidos a diferentes lenguas; hay que esperar, facilitar y valorar la participación de todos.

Al hablar de diversidad cultural, las medidas técnicas de apoyo lingüístico son las más extendidas, mientras que las medidas relacionadas con el mundo de los materiales manipulativos y de los juegos se asocian a la diversidad de ritmos de aprendizaje. Los ejemplos de esta sección muestran una diversidad que va más allá de lenguas y recursos didácticos. También muestran que la realidad multicultural se refiere a cualquier grupo humano, cuente o no con personas inmigradas. Al enfrentarse a la resolución de un problema matemático, dos personas pueden diferir en las interpretaciones del enunciado y los datos a pesar de ser del mismo país o hablar una misma lengua. Al hacer matemáticas, el bagaje de experiencias puede crear más diferencias entre dos personas «autóctonas» que entre alguien «autóctono» y alguien «inmigrado».

El enfoque intercultural ha de partir de una noción de cultura más global no asociada exclusivamente a etnias y grupos lingüísticos (Olivé, 2000). Estamos ante la difícil tarea de ampliar la diversidad cultural de lenguas, vestidos, comidas, fiestas... incluyendo la diversidad de formas de pensar las matemáticas. Urge, además, encontrar formas de concretar esta diversidad en los currículos oficiales. La pedagogía intercultural es una cuestión principalmente metodológica, de comprensión e investigación de condiciones para el intercambio. Con todo, hay elementos de los contenidos de enseñanza que deben ser revisados. Los libros de texto de matemáticas, por ejemplo, no deberían obviar algunos de los contenidos que ilustramos a continuación.

La diversidad de procedimientos algorítmicos

➡ **¿Qué procedimientos se han seguido en la resolución de estas operaciones?**

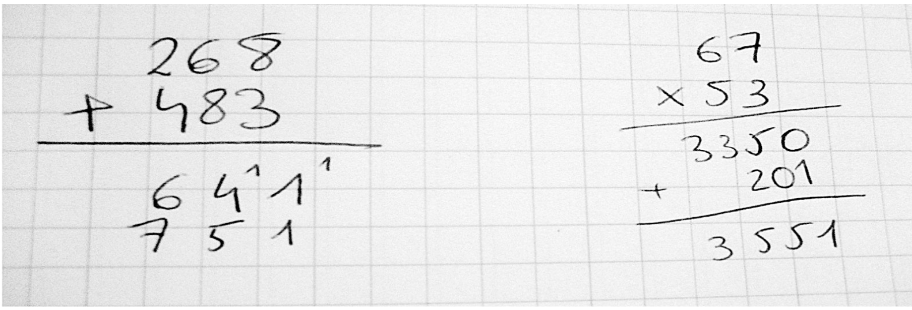


Figura 4.1. *Fragmento del cuaderno de una alumna*

Después de haber pensado más de un minuto...

Los años de trabajo con maestros y visitas a escuelas nos han proporcionado ejemplos de diversidad en las prácticas matemáticas. En particular, hemos recogido formas diferentes de sumar, restar, multiplicar y dividir. Ahora explicamos el caso de una alumna finlandesa, Nina, escolarizada en un centro de secundaria de Barcelona. Nina sorprendió a sus compañeros de clase y a su profesora con un algoritmo de la suma inesperado. Aunque llevaba escolarizada tres años entre nosotros, continuaba sumando del mismo modo que había aprendido en Finlandia. Durante la resolución de una tarea, cuando Nina estaba realizando una suma en su cuaderno, la profesora pasó cerca de ella y se interesó por cómo estaba operando.

En nuestro sistema escolar, es habitual sumar unidades del mismo orden empezando por las inferiores. Si la suma de estas cantidades da una unidad de orden superior, ésta pasa a registrarse entre las unidades de orden inmediatamente superior. El algoritmo de la suma usado por Nina sigue las mismas pautas pero en el orden inverso. Tal y como nos explicó ella, hay escuelas de tradición no sueca en el sistema escolar finlandés que usan el algoritmo de la suma «de izquierda a derecha»: se empieza por la izquierda, se suma columna a columna y se ajusta el resultado. Los maestros de estas escuelas justifican el método argumentando que así se siguen los pasos de la lectoescritura, que también es «de izquierda a derecha». Para los alumnos, este sistema pasa a ser tan automático que ajustan el resultado a medida que suman las columnas. Nina explicó el procedimiento dando muestras de comprensión de los significados matemáticos implicados en el desarrollo del algoritmo:

> «200 + 400 es 600, pero la otra columna me indica que hay que añadir 100, por este motivo escribo 7, aunque al principio no sé que será 7. En realidad sigo dos pasos. Primero 200 + 400 es 600, 60 + 80 es 140 y 8 + 3 es 11. Después está el segundo paso, que es el último. Cuando estoy con las decenas, me quedo con 40 y paso 100 a las centenas, y así tengo 7. En el lugar de las unidades, me quedo con 1 y paso 10 a las decenas, y así tengo 5».

Al día siguiente, la profesora se interesó por el método de multiplicación de la alumna. Pensó que era probable que Nina hubiera aprendido un algoritmo para multiplicar coherente con el de la suma. El algoritmo de la multiplicación, en sintonía con el de la suma, seguía el mismo orden que la lectoescritura: se empieza por los dígitos de la izquierda y se añaden ceros cuando convenga. Nina ilustró el método con la multiplicación entre 67 y 53 en la pizarra con la siguiente explicación:

> «Multiplico 67 por 5 y me da 335, pero añado 0 porque 5 hace referencia a 50; lo hago como con la suma, de izquierda a derecha. Esta multiplicación me da 3350. Después, multiplico 67 por 3, que son unidades. Ahora me da 201. Sumo los resultados de las dos multiplicaciones. Ya sabéis, a mi manera».

Después de haber explicado el método, Nina se mostró contenta por haber compartido estos aprendizajes. Al llegar a Barcelona, a los diez años, aprendió a reconocer con éxito algoritmos alternativos sin dejar de usar los suyos. Aunque en algunas escuelas de su país se enseñan los dos tipos de algoritmos, «de izquierda a derecha» y «de derecha a izquierda», había visto por primera vez «una operación al revés» en Barcelona. Por necesidad, aprendió de la diferencia. Los compañeros de escuela no necesitaron aprender otras formas de operar. No sospechaban que existieran ni tampoco se produjo una situación favorable al intercambio de conocimiento matemático.

Este ejemplo pone de manifiesto que a menudo se sabe más de lo que se llega a expresar. Hay alumnos que no expresan todo lo que saben porque creen que algunos de sus conocimientos no tienen valor en el nuevo contexto escolar. Otros alumnos tampoco expresan todo lo que saben porque no tienen bastantes herramientas para reconocer cuándo, dónde, cómo y a quién deberían expresarlo. A menudo no se consigue expresar qué se sabe hasta que se crea una situación favorable de intercambio de conocimientos.

Piaget argumentaba que el aprendizaje es un tipo de cambio conceptual que tiene lugar cuando los que aprenden son capaces de reestructurar su conocimiento y atender a conocimientos imprevistos. Estos conocimientos imprevistos pueden ser entendidos como formas de expresión de la diferencia. Vygotski argumentaba que la primera fuente de reestructuración del conocimiento es el contacto con los demás. Así, la diferencia no es resultado de nuestros cambios sino de los cambios vividos como consecuencia del contraste con otras personas, que siempre son diferentes a nosotros.

El ejemplo de Nina muestra que la diversidad cultural en matemáticas no puede restringirse al alumnado inmigrado extracomunitario. No hay que ir a un país lejano para encontrar diferencias en las prácticas matemáticas, ni estudiar casos de alumnos marroquíes, chinos... A menudo se habla de multiculturalidad en términos de las necesidades de los grupos minorizados y se identifica con un cierto tipo de persona inmigrado. Sin embargo, hay que repensar el papel de todos los colectivos, de todos los agentes sociales, en la construcción de realidades multiculturales.

Hemos documentado otros casos de alumnado extracomunitario que suma y multiplica de forma distinta a las habituales en nuestro país. La Figura 4.2. reproduce dos operaciones hechas por Mourad, un alumno marroquí de origen berebere escolarizado en un centro de secundaria próximo a Barcelona[1]. Descubrir de qué operación se trata y qué procedimiento ha seguido el alumno es una buena actividad. Avanzamos que las cifras habrán de leerse en vertical y de izquierda a derecha.

La Figura 4.3. reproduce parte de una prueba de diagnóstico inicial para el alumnado recién llegado, elaborada por el antiguo Programa de Compensa-

[1] Xavier Vilella, profesor de matemáticas del IES Vilatzara, nos proporcionó este ejemplo.

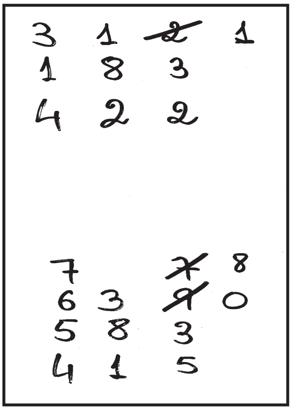


Figura 4.2. *Ejemplos de operaciones*

toria en las escuelas catalanas. Mourad, meses antes, dejó la prueba en blanco. La dificultad de Mourad para entender la prueba llevó a concluir que el alumno desconocía las operaciones básicas. Si observamos con atención la Figura 4.3. deduciremos que Mourad tuvo dificultades para saber entender qué se le estaba pidiendo.

A fin de regular de forma constructiva las diferencias, no hay que sustituir nuestras formas de operar por otras usadas en escuelas de Finlandia o en partes de Marruecos. Se trata de valorar positivamente estas prácticas y convertirlas en un punto de contraste en relación con nuestras prácticas de referencia. Unas y otras prácticas son recursos valiosos para aprender más y mejores matemáticas. Debería complementarse el estudio de las operaciones básicas desde la perspectiva dada por la historia de las matemáticas con una visión contemporánea derivada de la coexistencia de diferencias en estas prácticas. La

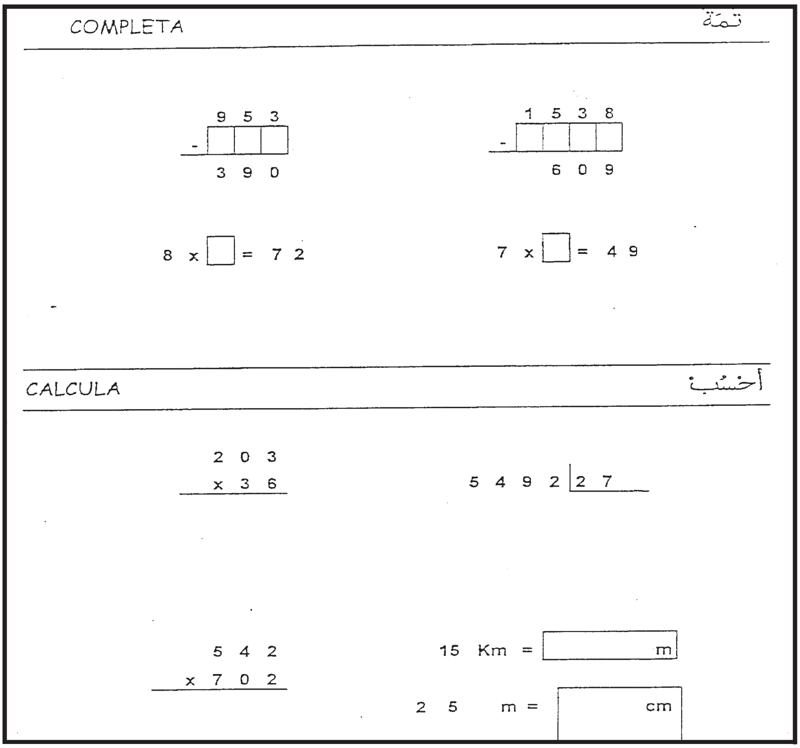


Figura 4.3. *Parte de una prueba de diagnóstico inicial*

dimensión histórica de las diferencias no ha de suplir la realidad actual. Nuestra forma de sumar no es un punto final en la historia de la evolución humana, sino una expresión cultural que convive con otras formas de sumar también válidas.

Al llegar al nuevo país, a Nina se le propuso la misma prueba de diagnóstico inicial. Ella no dejó la hoja en blanco y fue ubicada en una clase regular con el resto de alumnos locales. Mourad, sin embargo, fue asignado a un aula de acogida con objetivos compensatorios durante las horas de clase de matemáticas. Se creyó que la presencia en el aula regular de un alumno con un supuesto desconocimiento de contenidos matemáticos básicos haría más lento el aprovechamiento escolar del resto de alumnos. El sistema de vías académicas en paralelo a menudo se justifica desde el supuesto de que una educación matemática de calidad sólo es posible si previamente se ha producido algún tipo de separación entre alumnos.

La ubicación de Mourad en un aula de acogida fue transitoria. Se pretendía ayudarlo durante un tiempo variable en función de sus avances. El buen propósito era facilitar la integración gradual en el nuevo sistema escolar. En España, los grupos separados de inmigrantes pueden mantenerse como máximo un año. En Grecia, Alemania y Chequia, hay alumnos inmigrantes en aulas de acogida hasta dos años. Es probable que supuestas faltas de conocimientos o escolarizaciones irregulares se usen como motivos de estancias largas en grupos de acogida. En el caso de Mourad, el alumno ha de aprender nuevas formas de operar porque las suyas no siempre serán aceptadas. Pero no debería ser necesario negar algunos de sus conocimientos a fin de que adquiera otros nuevos, especialmente si lo que el alumno ya sabe está bien sabido.

La diversidad de representaciones sobre las matemáticas

➡ ¿Qué puede haber llevado a sustituir la actividad matemática por dibujos?

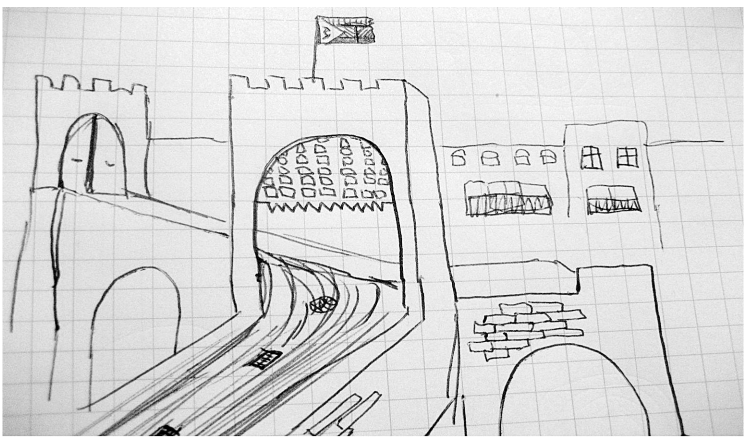


Figura 4.4. *Dibujo de una alumna durante una clase de matemáticas*

Después de haber pensado más de un minuto...

La educación matemática es más que un lugar de encuentro de personas diferentes que comparten prácticas comunes. Precisamente, una dificultad del trabajo de matemáticas es asumir la universalidad de sus prácticas. Esta asunción errónea hace que no todas las prácticas sean facilitadas ni representadas por igual. El fenómeno de desigualdad es especialmente patente en situaciones de gran diversidad. En el caso de las matemáticas, las aspiraciones de universalidad hacen referencia a las grandes actividades comunes a toda cultura: contar, calcular, medir, etc. Son universales en tanto que todos los grupos necesitan haber articulado técnicas para desarrollarlas. Lo que no puede considerarse universal son las técnicas, que son propias de cada grupo a pesar de que puedan compartirse. Por otra parte, dentro de cada grupo, las particularidades pueden llevar a modificar ciertas técnicas. Existen, por lo tanto, tres niveles a considerar: la persona, la cultura de la persona y los invariantes comunes a toda cultura.

Con respecto a las técnicas matemáticas, no podemos esperar que en todas partes se sume del mismo modo, ni que todas las personas de un mismo grupo sumen igual. Puede pasar que una persona finlandesa distinta de la alumna del ejemplo anterior no sume de izquierda a derecha, o que dos personas de países diferentes sumen siguiendo el mismo procedimiento. No se puede hablar de alumnos en general. Cada uno de ellos parte de una situación diferente y llega a la escuela con necesidades e intereses distintos, más allá de su país de origen o de su grupo cultural de referencia.

Hay un cierto consenso sobre la diversidad y la variabilidad presentes en la dimensión cultural de todo grupo humano. El caso de Nina debe contribuir a extender estas características al caso de la educación matemática. Con todo, ser conscientes de la diversidad de técnicas no es suficiente. Existen diferencias sutiles que tienen que ver con los significados que las personas asocian a las matemáticas y a su práctica. No se trata de diferencias en los procedimientos ni en los contenidos, pero tienen un gran impacto en los comportamientos matemáticos. A fin de ilustrar a qué tipo de significados nos referimos, recogemos un episodio en un aula de un colegio de Barcelona.

Samina, una alumna paquistaní de dieciséis años, dejó de ir a la escuela durante una semana porque su prima había llegado de Islamabad y su familia esperaba de ella que la atendiera. Al regresar, el profesor de matemáticas propuso una sesión de resolución de problemas. Samina ni siquiera abrió la libreta, a diferencia de lo que hacía habitualmente. Tomó la hoja de un compañero y se puso a dibujar el castillo de la Figura 4.4. Cuando el profesor la riñó, respondió: «No puedo hacer nada». Durante muchas semanas, la alumna no participó en las clases de matemáticas, a pesar de que se le pedía que se implicara en las tareas. Su actitud de inhibición contrastaba con la participación activa en otras materias. El profesor sospechaba que se había producido

algún tipo de conflicto emocional pero no conseguía que la alumna lo contara y decía lo siguiente:

> «No entiendo qué ha producido un cambio tan fuerte en la participación de Samina. No me parece una razón suficiente que crea haber perdido el hilo con sólo faltar una semana, aunque eso explicaría que continúe motivada en otras materias.»

Al cabo de unos días, en una entrevista, Samina dijo:

> «En las otras asignaturas se pueden aprender unas cosas sin saber otras, y si hay cosas que no sé, las puedo aprender sola en casa o puedo pedir a una amiga que me las explique. En matemáticas, cuando no aprendes una cosa ya estás perdida [...] Se tiene que respetar cada nivel de estudio, esto funciona así».

La entrevista permite entender algunos motivos de su inhibición. Samina explicó que el profesor de matemáticas en Pakistán había insistido durante cuatro años en la necesidad de exigir unos aprendizajes mínimos al finalizar cada «nivel de estudio». Ningún alumno podía pasar a un nivel superior sin los aprendizajes requeridos en los niveles anteriores, porque cualquier carencia en alguno de los niveles haría imposible el progreso. Samina interpretó que se había «saltado» un nivel de estudio como consecuencia de haber faltado una semana a clase. Después de la entrevista y de nuestras explicaciones, volvió a participar en el aula, a pesar de persistir en algunas representaciones:

> «En España se puede pasar de un nivel de estudio al siguiente sin saberlo todo. En Pakistán tienes que quedarte en el nivel. Hay cosas que yo no he aprendido porque falté toda una semana. Hay cosas que se han explicado en clase que ya no he podido aprender, pero aquí pasaré igualmente al siguiente nivel».

Estas palabras sugieren pocos cambios en las representaciones sobre la naturaleza de las matemáticas y las formas de aprendizaje. Los cambios producidos están relacionados con representaciones sobre la enseñanza de las matemáticas. Samina está convencida de que ya no le es posible acceder a ciertos aprendizajes y de que su ausencia en clase durante una semana condicionará aprendizajes matemáticos futuros. Ha construido una distinción entre «aprender» y «superar un nivel de estudio». Es comprensible que al profesor de Barcelona le fuera difícil adivinar qué estaba pasando sin contar con una explicación de la alumna. En una entrevista con él nos explicó cuánto le habían sorprendido los motivos de la alumna para no participar en clase:

> «Sabía que Samina estaba viviendo una especie de bloqueo pero no me imaginé que la experiencia de este bloqueo tuviera que ver con su manera de entender las matemáticas y de entender cómo se aprenden. Cuando llegó a la escuela, todos pensamos que tendría muchas dificultades porque ni siquiera escribía bien los números. Yo creía que eso estaba superado y que en clase de matemáticas ya no importaba dónde hubiera nacido».

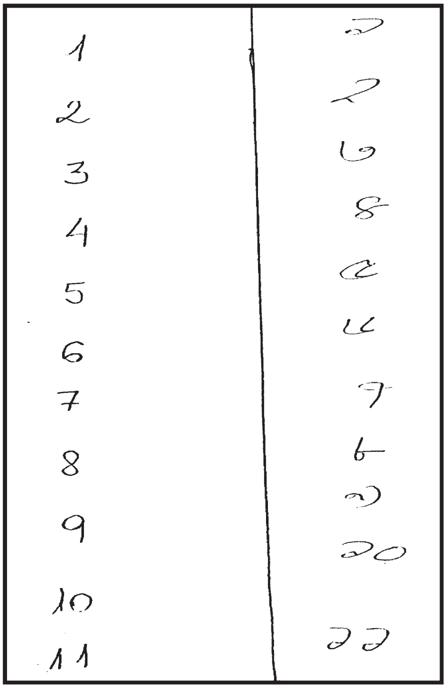


Figura 4.5. *Grafías de números*

Samina llegó a Barcelona escribiendo los números tal como se le habían enseñado. Eso hizo que tuviera dificultades al realizar la prueba inicial que recogíamos en el apartado anterior. En la figura 4.5. se ve parte de un papel escrito por la alumna cuando se le pidió que escribiera los números de otra manera. El profesorado de la nueva escuela dio por supuesto que, una vez superadas las diferencias en el lenguaje matemático, no habría diferencias de otros tipos que fueran relevantes para el estudio de las matemáticas.

No podemos asumir la gran cantidad de demandas de la escuela multicultural. No podemos conocer todas las formas de escribir los números, de sumar, de multiplicar, ni tampoco podemos contar con toda la información necesaria a fin de entrever las representaciones de los demás. Sin embargo, si se facilitan espacios de intercambio, si miramos la realidad multicultural acompañados, tenemos más recursos para la interpretación y la acción. El trabajo en colaboración es un buen recurso en la sociedad actual. En el caso de la educación matemática, habría sido conveniente que el profesor hubiera hablado con la familia de la alumna, con la propia alumna o con miembros de la comunidad pakistaní vinculados a la escuela a fin de aclarar qué estaba pasando.

Una mirada al mundo de la educación matemática desde la asunción de la diversidad de personas y prácticas dificulta la estigmatización del aprendiz. Si consideramos la importancia del contexto, las condiciones del proceso de aprendizaje matemático de una persona no se pueden atribuir sólo a supuestas capacidades o déficits. Se puede pensar que Samina deja de participar porque de repente ha perdido el interés o porque las tareas que ha de resolver cada vez le resultan más complicadas. Esta interpretación se basa en carencias de la alumna. La caracterización cultural de la práctica matemática abre la puerta a otras interpretaciones. Se puede pensar que Samina ha encontrado obstáculos externos que le impiden mantener su participación.

Es difícil saber desde qué trayectoria vital cada persona accede al conocimiento. Lo que importa es ser conscientes de que los aprendizajes de geome-

tría, aritmética, álgebra... van ligados a las trayectorias vitales. En una situación formal de aprendizaje, cuando se decide cómo evaluar conocimientos, cómo fijar currículos y cómo organizar dinámicas de aula, ha de evitarse tomar estas decisiones en solitario. No se pueden excluir conocimientos y formas de ver el mundo sin que se produzca una pérdida de oportunidades. Obviar las grafías de Samina o su concepción lineal del aprendizaje matemático es una oportunidad perdida para el debate sobre las matemáticas, a menudo relegado a favor del debate de matemáticas. La educación matemática no puede reducirse a la transmisión directa de conocimientos inmutables. Este planteamiento contradice los principios del pensamiento crítico, expresa una visión simplificada del mundo de las matemáticas y limita las posibilidades de la práctica.

La diversidad en la resolución de problemas

➡ **¿Por qué deberíamos hablar de tomates en la resolución de este problema?**

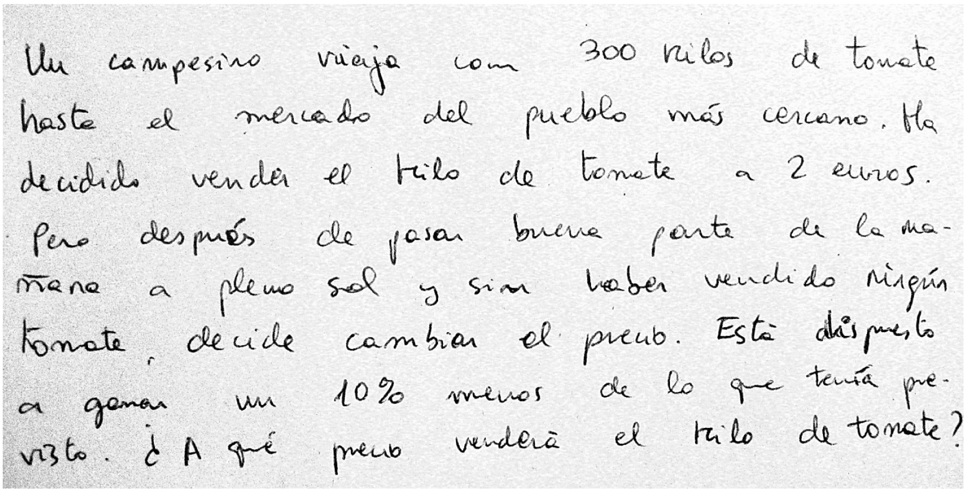

Un campesino viaja con 300 kilos de tomate hasta el mercado del pueblo más cercano. Ha decidido vender el kilo de tomate a 2 euros. Pero después de pasar buena parte de la mañana a pleno sol y sin haber vendido ningún tomate, decide cambiar el precio. Está dispuesto a ganar un 10% menos de lo que tenía previsto. ¿A qué precio venderá el kilo de tomate?

Figura 4.6. *Enunciado de un problema reescrito por un alumno*

Después de haber pensado más de un minuto...

Al inicio del capítulo, el ejemplo de los antropólogos y la tribu africana muestra diferencias en la resolución de un problema de clasificar. No hay que ir tan lejos en el tiempo ni en el espacio para encontrar diferencias en las estrategias de resolución de problemas. En una clase de matemáticas de un centro

de secundaria de Barcelona, la profesora dictó en catalán el enunciado del problema de la Figura 4.6., donde reproducimos la redacción de un alumno que hizo una traducción al castellano. Los alumnos se organizaron en grupos y, después de trabajar en el problema, se inició la discusión conjunta. A algunos alumnos les resultaba extraño que un valor numérico del enunciado, 300 kilos, no fuera necesario en la resolución. Uno de ellos sugirió que, si se optaba por no usar los kilogramos de tomate en los cálculos, era probable que el enunciado estuviera mal redactado. Las formas más habituales de resolución fueron dos:

a) $300 \times 2 = 600 \rightarrow (10 / 100) \times 600 = 60 \rightarrow 600 - 60 = 540 \rightarrow 540 / 300 = 1{,}8$ €
b) $(10 / 100) \times 2 = 0{,}2 \rightarrow 2 - 0{,}2 = 1{,}8$ €

Cuando faltaban diez minutos para el final de la sesión, un alumno, Luis, introdujo una interpretación diferente del enunciado. Luis, procedente de una escuela del ámbito rural, se había incorporado a la nueva escuela hacía poco más de una semana. Empezó explicando que no hablaba en nombre de los compañeros de grupo porque no habían estado de acuerdo con su forma de entender el problema. Después añadió:

> «Este problema es realmente complicado. Los tomates son como la fruta, tienen mucha agua. Si el campesino estuvo a pleno sol y los tomates también, entonces se ha evaporado mucha agua, y ahora ya no tiene 300 kilos. Como máximo debe tener unos 290 kilos. Mi abuelo tiene mucho cuidado para no dejar las cosas a pleno sol».

Esta intervención provocó una risa generalizada. Luis proponía usar la cantidad de tomates en los cálculos y, además, pretendía usar un valor numérico aproximado, 290 kilos, que ni siquiera aparecía en el enunciado inicial. Basaba sus argumentos en los conocimientos de su abuelo. La profesora admitió que no se le había ocurrido pensar en la posibilidad de la pérdida de peso de los tomates. Con todo, no prestó demasiada atención a la propuesta del alumno y cuestionó cómo se había obtenido el peso reducido de los tomates. No estaba claro que 290 kilos fuera el peso real de los tomates después de haber sido expuestos durante horas al sol. Luis contestó diciendo que, si no se admitía el valor de 290 kilos, había que exigir que el enunciado del problema proporcionara este dato. De lo contrario, se trataba de un enunciado mal formulado. La profesora reaccionó quitando importancia al comentario de Luis, aunque minutos antes había hablado de la posibilidad de que el enunciado estuviera mal redactado.

Aquí, se pone de relieve que no toda forma de pensamiento crítico está permitida. Cualquier contexto humano tiene mecanismos para establecer límites para la crítica. En el caso de este aula, el mecanismo principal parece ser la no incorporación de los razonamientos de Luis a la discusión conjunta. Al escuchar a profesores que hablan de la importancia de introducir contextos

reales en ambientes de resolución de problemas, conviene plantearse preguntas sobre la seriedad con la que se toman sus palabras. Si se ofrece un enunciado con un contexto real, que anime a los alumnos a introducir reflexiones sobre este contexto, ¿tiene sentido penalizar la proyección de experiencias personales? ¿Cómo se explica a los alumnos que han de creerse el contexto y al mismo tiempo mantener una distancia prudencial durante el proceso de resolución del problema? Una pedagogía basada en el uso de contextos reales ha de dar prioridad al establecimiento de conexiones entre las matemáticas y las experiencias de los aprendices. Luis creyó que podía aportar su punto de vista. No obstante, la profesora tratando como una anécdota sus comentarios y los compañeros riéndose, pueden haber hecho que decida no comportarse del mismo modo en otra ocasión.

Habitualmente los entornos de aprendizaje de cualquier materia escolar están muy controlados. Cada problema se piensa asociado a unos contenidos curriculares y se espera de los alumnos que practiquen estrategias de aprendizaje específicas. De este modo, se controla el riesgo de acabar trabajando contenidos no previstos y el aprendizaje se considera más seguro. El control de este riesgo, sin embargo, tiene un coste elevado. Se restringe la iniciativa personal, el desarrollo del pensamiento crítico y, sin duda, el grado de implicación y motivación en la actividad.

Durante el tiempo de trabajo con su grupo, Luis intenta convencer sin éxito a los compañeros sobre la condición de fruta de los tomates. Les explica que su abuelo siempre le ha dicho que los tomates son una fruta, aunque la gente los considere una verdura. Las observaciones de Luis son ciertas: los tomates son biológicamente una fruta pero culturalmente, al menos en nuestra cultura, se los trata como una verdura. Al pasar la profesora cerca del grupo y oír que están hablando de frutas y verduras, les pide concentración en el tema del problema. ¿Cuál es, sin embargo, el tema del problema? Para Luis, los tomates son un elemento clave. Para la profesora son un contenido secundario que no debe centrar la atención del trabajo.

Podríamos haber explicado muchos otros ejemplos sobre diferencias en la resolución de problemas. Recomendamos pensar en el siguiente enunciado:

> «De la energía aportada a un coche por medio de la gasolina, sólo un 20% se usa en la locomoción. La energía sobrante se gasta al refrigerar los cilindros del motor, en el aire acondicionado, etc. Si en el futuro consiguiéramos coches que aprovecharan el 40% de la gasolina para moverse, ¿cuánto dinero se ahorraría cada mes una familia en el coche?».

Como en el caso anterior, el enunciado sugiere un contexto real de una familia con un coche que podría llegar a ahorrar bastante dinero si se optimizara el uso de la energía creada a partir de la gasolina. El enunciado plantea una situación que no da todos los datos de inmediato. Hay que tomar decisiones sobre qué significa una familia en coche, a cuántos kilómetros de tra-

yectos semanales o mensuales equivale. También hay que fijar, por ejemplo, un precio para la gasolina. Cada persona ha de concretar las distintas variables. Es de esperar, por lo tanto, que existan multitud de interpretaciones en cuanto a la aproximación y resolución del problema.

En este caso también podemos encontrar contenidos inesperados que habrá que gestionar adecuadamente. Es ilustrativo el comportamiento de una alumna, Clara, que usó la realidad de su casa y sus convicciones éticas en la interpretación del problema. Durante la sesión dedicada a la resolución del problema, Clara no participó. Al día siguiente, sin embargo, pidió la palabra para explicar lo siguiente:

> «En mi casa nunca hemos tenido coche, pero tenemos que respirar el humo que dejan los coches de los demás. No estoy de acuerdo con preguntar sólo por el ahorro. He leído algo sobre el dióxido de carbono. Nosotros lo desprendemos y la combustión de la gasolina de los coches también. Eso está matando el planeta. Necesito un supuesto sobre el dióxido de carbono para saber cuánto mejorará el medio ambiente. Creo que es más importante saber el mal que le ahorraremos al planeta que saber cuánto dinero se ahorrarán las familias».

La alumna construye una concepción de la realidad que integra conocimientos y valores éticos. Es probable que el resto de alumnos de su aula también sean capaces de ello, pero que no relacionen con la misma facilidad actividad matemática y valoraciones éticas. La educación matemática en valores no se contradice con una educación de énfasis en los conocimientos. De hecho, la estrategia elaborada por Clara es de una gran sofisticación desde el punto de vista de las matemáticas.

Clara compara el dióxido de carbono que libera un gramo de gasolina convencional en combustión con la cantidad de CO_2 liberado por otros tipos de combustibles alternativos como el biodiesel, el etanol producido a partir del cultivo de cereales o los rechazos de biomasa. A continuación, compara el precio de cinco tipos de combustibles y elabora una tabla con precios y cantidad de CO_2 liberado. Concluye que ni el elevado precio de la gasolina convencional ni su poder contaminante justifican su uso. La alumna también dibuja un gráfico a partir del descubrimiento de una relación proporcional entre precio y poder contaminante. Clara no tiene en cuenta, sin embargo, que un problema grave en torno a los combustibles renovables de origen biológico es que el coste de la conversión en energía es muy elevado. Sospechamos que la alumna recibió ayuda en el proceso de resolución, aunque la ayuda no resta mérito a su implicación en este proceso.

Los ejemplos de Luis y Clara muestran situaciones de multiculturalidad protagonizadas por alumnos no inmigrados. Decíamos que no hay que ir a buscar el ejemplo de la tribu africana ni el de un chico gitano y las tablas de multiplicar para argumentar el carácter multicultural de todo contexto humano. Dos personas procedentes de contextos culturales y sociales apa-

rentemente similares pueden diferir mucho en la forma de entender y llevar a cabo la actividad matemática. La diversidad cultural es más profunda que la forma de vestir, los hábitos alimentarios, el color de la piel o la lengua que se habla. La diversidad cultural es, en definitiva, un rasgo común de cualquier grupo.

La diversidad de significados atribuidos a símbolos matemáticos

➡ **¿De qué otras formas se podrían obtener símbolos para los lavabos a partir de la combinación de figuras de la geometría plana?**



Figura 4.7. *Fotografía de parte de las puertas de dos lavabos*[2]

Después de haber pensado más de un minuto...

Hemos recogido ejemplos de alumnos inmigrados europeos y extracomunitarios. Acabamos la sección con otro ejemplo de una alumna del país. La pedagogía intercultural suele vincularse al alumnado extranjero extracomunitario. Pocas veces se asocia a extranjeros procedentes del llamado *primer mundo* —de ahí que hayamos querido empezar con el ejemplo de una alumna finlandesa— y aún menos se usa para referirse al alumnado autóctono —de ahí esta elección. Cerrar con el caso de esta alumna es una opción deliberada para continuar insistiendo en el carácter multicultural de todo grupo.

[2] La idea de la actividad fue propuesta por José M.ª Chamoso y M.ª José Cáceres, de la Universidad de Salamanca. La fotografía también ha sido proporcionada por ellos.

En esta ocasión hemos seleccionado el aula de matemáticas de un centro de primaria donde realizamos un asesoramiento. Para el trabajo contextualizado de la geometría plana, propusimos una serie de actividades al equipo de maestros, siendo una de ellas la que encabeza este apartado. Durante la observación del trabajo de esta actividad, confirmamos que se trataba de una situación de aprendizaje rica. El alumnado diseñó símbolos alternativos a partir de la combinación de figuras planas que se les habían explicado en clase: círculos, circunferencias, triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios, etc. A modo de ejemplo, la Figura 4.8. recoge algunas de las propuestas.

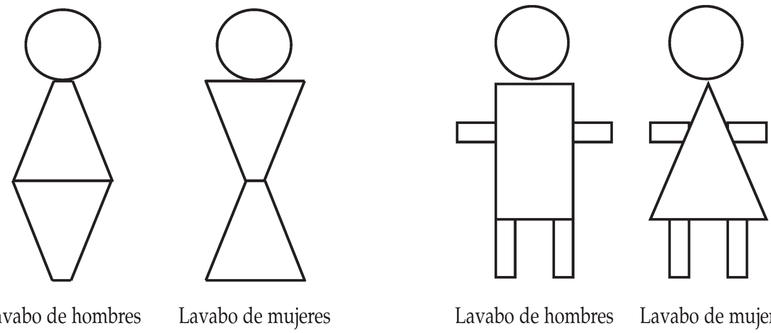
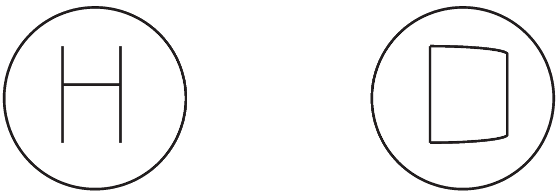


Figura 4.8. *Ejemplos de composiciones de los alumnos*

Ante la sorpresa de todos, Berta, una alumna del aula, dibujó en la pizarra las siguientes propuestas para el lavabo de hombres y mujeres, respectivamente:



La maestra dijo que estas representaciones no valían porque no se estaban usando combinaciones de más de una figura geométrica plana, sugiriendo así como criterio principal de evaluación «haber usado tantas figuras planas como sea posible», aunque el enunciado de la actividad no lo hubiera establecido de forma explícita. Berta argumentó que los círculos eran figuras planas y que las líneas rectas y curvas con que había representado las letras de dentro de los círculos también eran elementos de la geometría plana. Dado que la alumna tenía razón, la maestra añadió que los únicos símbolos que se podían usar eran figuras de dos dimensiones, excluyendo así las líneas. Otra vez, Berta, con sagacidad, respondió diciendo que la maestra sólo había hablado

de símbolos y que, por lo tanto, ella había supuesto que las letras eran una opción válida. Ante este argumento, la maestra no puso ningún inconveniente, pero continuó la clase sin prestar atención a los símbolos diseñados por esta alumna y no volvió a mencionarlos.

En el cuaderno de Berta se podían ver los intentos iniciales por representar los dos lavabos sólo con figuras geométricas. Al final desistió porque siempre acababa necesitando un símbolo que distinguiera el vestuario de la mujer y del hombre. Berta, como la mayoría de chicas de su clase, siempre iba vestida con pantalones y en muy pocas ocasiones se ponía falda o vestido. Fuera del aula explicó que no tenía sentido representar a la mujer con un triángulo que sugiriera una falda o un vestido, en contraposición al hombre. Según ella, recurrir al uso de letras era más adecuado que representar a la mujer de una manera «poco moderna».

En el currículo matemático escolar de educación primaria salen las nociones de círculo, circunferencia, cuadrado, rectángulo, etc. La alumna tenía claras estas opciones porque incluso argumentó que ella era la única que había usado círculos:

> «Todos han utilizado circunferencias porque no han puesto nada dentro de las formas redondas. Yo soy la única que ha utilizado círculos porque he puesto las letras H y D dentro. Además, yo he utilizado figuras de la geometría plana que no salen en el libro. La D que yo he hecho no la ha hecho nadie más».

La alumna, miembro del grupo cultural mayoritario, examina su cultura a la vez que aplica correctamente conocimientos matemáticos aprendidos. Aunque vive en una sociedad donde los hombres no acostumbran a llevar falda ni vestido, Berta no acepta este hecho para distinguir hombres y mujeres. Como consecuencia, no encuentra fácilmente una composición de figuras geométricas que satisfagan a la maestra. La atención a la diversidad también tiene que ver con considerar los puntos de vista que las diferentes personas desarrollan en torno a aspectos de su cultura. Desde una perspectiva matemática, Berta entiende las figuras geométricas de una forma similar a como las entienden sus compañeros y la maestra. No obstante, desde la perspectiva dada por su interpretación del trabajo de matemáticas, la combinación de triángulos y trapecios usada por compañeros del aula representa una visión estereotipada de la mujer.

La pedagogía intercultural pone de relieve la influencia del entorno cultural y social de los alumnos en el desarrollo de cualquier práctica. El entorno del alumno condiciona las formas de aprendizaje y las formas de atribuir significados a elementos de los currículos oficiales. Dicho de otro modo, las experiencias de los alumnos son una fuente ineludible del currículo. Los productos finales contenidos en el currículo de matemáticas —triángulos, trapecios, círculos, etc.— han de ser reubicados de acuerdo con las realidades de los alumnos. Podemos imaginar la idea de triángulo como una noción culturalmente neutra —si obviamos que en muchos lugares de Indonesia y Nueva Zelanda se

usa una clasificación de triángulos machos y hembras—, pero no debemos pensar que la noción de triángulo se usa en situaciones culturalmente neutras.

Inicialmente el trabajo de las representaciones de los lavabos se pensó como una actividad de geometría plana. El caso explicado indica las posibilidades en cuanto a la educación en valores. Existen materiales específicos de educación en valores, del mismo modo que existen materiales pensados para la educación intercultural. Con todo, las pedagogías inclusivas son aquellas capaces de ofrecer de forma integrada la adquisición de los temas curriculares. En el aula de matemáticas también es adecuado discutir si la representación estereotipada de la mujer en los símbolos de muchos lavabos ha de preservarse. Si se hubiera discutido esta cuestión en el aula de Berta, probablemente los alumnos no se habrían puesto de acuerdo entre ellos. No obstante, la experiencia formativa de discutir la representación de la mujer y de hacerlo en relación con una actividad matemática tiene un interés enorme.

A menudo, al argumentar la necesidad de conectar la educación en valores con la educación matemática, se apela al riesgo de empobrecer el aprendizaje matemático de los alumnos. Es cierto que el tiempo dedicado a discutir en clase las propuestas de Berta es un tiempo perdido en cuanto a la introducción, por ejemplo, de nuevas figuras planas como la elipse. Sin embargo, no deberíamos basar el aprendizaje matemático en la enseñanza de una secuencia estricta de contenidos. No se aprende geometría plana sólo porque alguien la enseñe. La participación de los aprendices es un factor clave, junto con la implicación social y afectiva. Cualquier aprendizaje matemático es un proceso de construcción personal que al mismo tiempo emprende procesos de investigación y de establecimiento de conexiones con otros aprendizajes. Cuando estos procesos se intentan detener, se pierde implicación y compromiso.

La maestra puede haber planificado la enseñanza de la elipse. No obstante, ha de ser capaz de adecuar la sesión de clase en función de las oportunidades de aprendizaje que introduzcan los alumnos. Además de hablar de vestidos y faldas, Berta menciona el peso inferior que se le supone a la mujer, en referencia a la cintura delgada que indica un icono de la Figura 4.8., en comparación con la cintura del hombre. Estos temas son de suma importancia en la sociedad actual y no deberían obviarse por el hecho de aparecer en el aula de matemáticas. La atención a la diversidad es también atención a la diversidad de valores. Deberíamos poder exigir que las combinaciones de figuras planas pensadas por los alumnos fueran respetuosas con el grupo de mujeres con cintura poco marcada y con pocas faldas en el armario.

LA DIVERSIDAD EN LA OBRA DE ESTALELLA

Josep Estalella, en la obra *Ciencia Recreativa*, incluye el caso de la multiplicación rusa. Se trata de un ejemplo de diversidad en los procedimientos algorítmicos de las matemáticas. Incluimos este ejemplo para trabajar la falsa iden-

tificación entre multiplicar y tablas de multiplicar. Seguramente, a la maestra del chico gitano del que hemos hablado al principio de este capítulo, le habría gustado saber que no hay que conocer las tablas de multiplicar para aprender a multiplicar. A continuación, recogemos ejemplos en otra línea. El valor de la obra de Estalella en cuanto a la atención a la diversidad ha de buscarse en el uso de contextos reales en los enunciados de problemas. Para la lectura de más ejemplos sobre diversidad de vivencias del contexto en la resolución de problemas, recomendamos la lectura de Callejo y Vila (2005), Planas y Civil (2007) Vila y Callejo y Vilella (2007).

En la época en que fue escrita *Ciencia Recreativa,* la realidad española y europea era muy diferente de la actual. Desde esta perspectiva, la lectura de la obra original es, por sí misma, un ejercicio de inmersión en otra época, en otro contexto. La retórica del lenguaje y el barroquismo de algunas actividades distan mucho de los planteamientos actuales con respecto al lenguaje científico, ya sea hablado o escrito. Aún así, la obra de Estalella constituye, en su conjunto, una muestra de diversidad cultural, donde se ponen de manifiesto divergencias producidas por el paso del tiempo. Si nos situamos en la visión de diversidad cultural sugerida en este capítulo, entendida como un elemento integrador, Estalella hace aportaciones encaminadas al intercambio de culturas (matemáticas). Es una aportación tímida, escasa en el contexto de toda la obra, pero parece una especie de intuición de la sociedad que llegaría con el tiempo.

Multiplicación rusa

> *Es un notable procedimiento el empleado por algunos pueblos de Rusia para hallar el producto de dos factores.*
>
> *Uno de los factores se divide reiteradamente por 2, despreciando siempre la parte decimal, hasta llegar a la unidad.*
>
> *Paralelamente a los cocientes obtenidos, se escriben los productos de multiplicar reiteradamente por 2 el otro factor.*
>
> *Se descartan los productos que se correspondan con los cocientes que terminen en cifra par.*
>
> *Se suman los restantes productos y se obtiene el producto definitivo de los dos factores propuestos.*
>
> *Para comprender el fundamento de este modo de multiplicar, tomemos dos números sencillos, por ejemplo, 18 y 7. Un producto no se altera cuando un factor se divide y el otro se multiplica por la misma cantidad, luego el producto pedido es igual al de* 9×14*; pero* 9×14 *es igual a* $8\times14 + 14$*. Dejemos aparte estas 14 unidades y sigamos con el* 8×14*, que es igual a* 4×28*, y éste es igual a* 2×56*, y éste es igual a* 1×112*; y sumando este 112 al 14 antes destacado, tendremos* $112 + 14 = 126$ *como valor de* 9×14*.*

> *Es decir, la regla de la multiplicación rusa se fundamenta en que un producto no se altera cuando uno de los factores se multiplica por 2, mientras el otro se divida por el mismo número, y en que rebajar una unidad de uno de los factores (esto es lo que se hace despreciando los decimales de los cocientes de 2) equivale a restar del producto el valor del otro factor.*

Estalella plantea el algoritmo de la llamada *multiplicación rusa*, aunque históricamente el procedimiento tenga orígenes mucho más complejos. Esta forma de multiplicar consiste en colocar los dos multiplicandos en el encabezamiento de dos columnas. El objetivo es llegar a reducir la multiplicación inicial a una multiplicación más sencilla donde uno de los factores sea la unidad. Los números de una columna se dividen por dos, mientras que los de la otra columna se doblan. Por lo tanto, sólo hay que saber hacer dobles y mitades. Cuando se encuentra un factor impar, se pone una señal al lado del otro factor, y cuando uno de los factores se convierte en 1, se suma el otro con todos los factores que hemos señalado. La simplicidad proviene de ser más fácil encontrar dobles y mitades que multiplicar por números grandes. Demos algunos ejemplos:

41 × 12 *	**16 × 48**
20 × 24	8 × 96
10 × 48	4 × 192
5 × 96 *	2 × 384
2 × 192	1 × 768*
1 × 384 *	
41 × 12 = 12 + 96 + 384 = 492	**16 × 48 = 768**

Con este algoritmo se puede descubrir que, si se multiplica por dos uno de los factores y se hace la mitad del otro factor, se obtiene el mismo producto (41×12 = 20×24). Si generalizamos, obtenemos la descomposición de un factor en potencias de 2. Veámoslo:

$$18 \times 7 = (18/2)\ 7 \times 2 = 9 \times 14 = 9/2 \times 14 \times 2 = (4 + 1/2) \times 14 \times 2 =$$
$$4 \times 28 + 14 = 2 \times 56 + 14 = (2^4 + 2) \times 7$$

Esta descomposición equivale a escribir el número 18 en base 2, es decir, $18_{(2)} = 10010 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

Más allá del contenido matemático implícito, la actividad permite conocer realidades diferentes de la nuestra, ofrecer una perspectiva más heterogénea y no tan etnocéntrica del mundo, de la forma de aprender, de las matemáticas... Todas las culturas necesitan multiplicar, pero cada una desarrolla métodos propios de multiplicación.

Cuestiones de aritmética

Si consideramos que la multiculturalidad engloba un abanico de situaciones amplio, la obra de Estalella está llena de actividades de atención a la diversidad. Una de las principales pretensiones de *Ciencia Recreativa* es llegar a los foráneos de la matemática, la física y la química, para cautivarlos. Garantizar el acceso de todo el mundo al conocimiento científico es atender la diversidad. Estalella es un maestro de este arte, tal como muestra en las actividades siguientes, en las que busca el camino sencillo, comprensible, para que cualquier persona con un conocimiento básico de las operaciones aritméticas de sumar, restar, multiplicar y dividir pueda disfrutar.

> *El número 45 puede ser descompuesto en dos sumandos tales que den el mismo número, 10, sumando 2 al primero, restando 2 al segundo, multiplicando por 2 el tercero y dividiendo por 2 el cuarto:*
>
> $$45 = 8 + 12 + 5 + 20$$
> $$8 + 2 = 10; \qquad 12 - 2 = 10; \qquad 5 \times 2 = 10; \qquad 20 : 2 = 10$$
>
> *De igual manera, el número 64 se puede descomponer en cuatro sumandos que cumplan las mismas condiciones con respeto a los números 12 y 3:*
>
> $$64 = 9 + 15 + 4 + 36$$
> $$9 + 3 = 12; \qquad 15 - 3 = 12; \qquad 4 \times 3 = 12; \qquad 36 : 3 = 12$$
>
> *Más difícil es, y no siempre posible, resolver el problema en esta forma: descomponer un número dado en cuatro sumandos tales que otro número sumado al primero, restado del segundo, multiplicado por el tercero y usado como divisor del cuarto, dé una suma, un resto, un producto y un cociente iguales. El sistema de ecuaciones con el que se resolvería:*
>
> $$a + n = m; \qquad b - n = m; \qquad c \times n = m; \qquad d : n = m$$
> $$a + b + c + d = \text{número dado}$$
>
> *contiene las incógnitas a, b, c y d (los cuatro sumandos), n (el número fijo usado sucesivamente como sumando, sustraendo, factor y divisor); y m (el número fijo que aparece sucesivamente como suma, resta, producto y cociente); siendo, pues, cinco las ecuaciones y seis las incógnitas, el problema parece indeterminado, pero la condición implícita de que los seis valores obtenidos para a, b, c, d, n y m sean enteros, convierte en muchos casos el problema en imposible.*

Estas actividades nos introducen en el mundo del álgebra, partiendo de la aritmética escolar —números naturales y operaciones de suma, resta, multiplicación, potenciación y extracción de raíces enteras entre estos números—, cuyos contenidos se han mantenido prácticamente inalterables hasta hoy día y se han basado en un lenguaje formal con un alto nivel de abstracción. Se

explica que las letras pueden representar objetos (*7m*, para expresar 7 objetos idénticos: 7 mesas, 7 lápices...); ejemplos generalizados (*n* números naturales, para expresar todos los números que forman parte de esta familia); variables (*8x*, siendo la *x* un valor numérico no especificado, como la edad, con lo cual 8*x* significa «8 veces la edad de»), o incógnitas ($8x - 4 = 0$, donde se puede llegar a conocer el valor de la variable *x* a partir de la resolución de una ecuación, inecuación o sistema).

Estalella trabaja el álgebra de forma progresiva: empieza por cuestiones de una extraordinaria similitud interna y con las últimas cuestiones llega a la generalización, plantea el problema desde la formulación general, «obviando» los casos concretos precedentes. Si la actividad se hubiera reducido al planteamiento de la última cuestión, que ha sido la tendencia mayoritaria de los libros de texto de matemáticas que han tratado el álgebra, el acceso a esta actividad habría sido más limitado. No se habría garantizado de igual manera el acceso para todo el mundo. De los comentarios del autor se desprende la preocupación por encontrar secuencias de actividades que hagan accesible el paso de lo concreto a lo abstracto. En este caso, Estalella no escoge un problema de contexto real para atender la diversidad, sino una estrategia de diversificación del acceso al álgebra: cada uno puede usar la secuencia de actividades de la forma más adecuada.

Reparto de vino

Por medio de la multiplicación rusa hemos mostrado que Estalella, de forma intuitiva, tuvo en cuenta que la educación matemática ha de considerar y valorar el conocimiento de todos los grupos. Por medio de las cuestiones de aritmética hemos recogido la preocupación por favorecer el acceso al conocimiento matemático. A través de la actividad del reparto de vino, y sobre todo de su resolución, mostramos la necesidad de repensar valores dados a las prácticas matemáticas. Se trata de un problema clásico al que ya se refieren Bachet y Tartaglia.

> *Veintiuna barricas, desigualmente llenas, a saber: siete completamente llenas de vino, siete llenas hasta la mitad y siete vacías, han de repartirse entre tres personas de manera que corresponda a todas la misma cantidad de vino y el mismo número de barricas.*

Se presentan dos formas de solucionar una situación de reparto: con un dibujo o bien con el álgebra formal. Estalella valora por igual las dos resoluciones e insiste en no interpretar el uso del álgebra como un criterio de calidad superior.

Con el apoyo de un dibujo, combinado con el tanteo y el pensamiento deductivo, una posible solución es la siguiente:

– Garrafas llenas: 7 (símbolo «X» en el dibujo)
– Garrafas llenas hasta la mitad: 7 (símbolo «/» en el dibujo)
– Garrafas vacías: 7 (símbolo «o» en el dibujo)

El vino se reparte entre tres personas; todas han de tener la misma cantidad de garrafas y vino. Aplicando una estrategia de reducción del problema a un caso más simple, suponemos que cada garrafa llena contiene un litro. Así podemos saber que en total tenemos 10 litros y medio de vino y que a cada persona le tocan tres y medio. Hacemos un esquema y repartimos a partes iguales.

1.ª persona	X	X	/	/			
2.ª persona	X	X	/	/			
3.ª persona	X	X	/	/			

Con esta repartición falta por dar un litro y medio de vino, que equivale a una garrafa llena y otra media. Al no poder dar a ninguna persona otra garrafa de un litro, ya que sobrepasaríamos la cantidad que puede tener, realizamos una transformación: con el uso de la equivalencia, cambiamos dos garrafas medio llenas de una persona por una llena:

1.ª persona	X	X	X				
2.ª persona	X	X	/	/			
3.ª persona	X	X	/	/			

Ahora tenemos las siete garrafas llenas repartidas. A continuación repartimos las tres garrafas medio llenas, teniendo en cuenta que cada persona ha de tener la misma cantidad de vino, y colocamos también las garrafas vacías. Una solución posible es:

1.ª persona	X	X	X	/	o	o	o	3 garrafas llenas, 1 medio llena y 3 vacías.
2.ª persona	X	X	/	/	/	o	o	2 garrafas llenas, 3 medio llenas y 2 vacías.
3.ª persona	X	X	/	/	/	o	o	2 garrafas llenas, 3 medio llenas y 2 vacías.

Con álgebra formal, el número total de barriles de vino es 21, y el de unidades de vino $7 \cdot (1 + 0 \cdot 5 + 0) = 10{,}5$. A cada uno le corresponden $21/3 = 7$ barriles de vino y $(10{,}5)/3 = 3{,}5$ unidades de vino. Llamamos x, y y z al número de barriles de vino llenos, medio llenos y vacíos, respectivamente, que

tocan a cada persona. Entonces, $1x + 0{,}5y + 0z = 3{,}5$ y $x + y + z = 7$. Resolviendo el sistema en función de z queda $x = z$ e $y = 7 - 2z$ con la condición de que $0 \leq x, y, z \leq 7$. Las posibles soluciones son:

x	0	1	2	3
y	7	5	3	1
z	0	1	2	3

Ahora hay que descomponer el número 7 en la suma de tres números naturales comprendidos entre 0 y 3, ambos incluidos. Las únicas posibles sumas son 2 + 2 + 3 y 3 + 3 + 1; por lo tanto, los únicos posibles repartos son los que da el autor.

El Reino de Castilla

Esta actividad se sitúa en el contexto de la Castilla del siglo X. La misma actividad, desde el punto de vista matemático, se puede situar en otros contextos: un tablero de ajedrez, una situación bancaria, etc.

> *El Romancero español señala el siguiente origen a la independencia del condado de Castilla en el siglo X. Habiendo el rey Sancho I de León mostrado deseos de poseer un hermoso caballo y un azor del conde Fernán González de Castilla, quiso éste regalárselos, más el rey sólo los aceptó señalándoles un elevado precio y fijando para pagarlo un plazo, pasado el cual, por cada día que transcurriera, el valor de la deuda se duplicaría. Debió de olvidar Sancho este compromiso, y como el conde no reclamó su cumplimiento hasta después de siete años, no pudo el rey satisfacer la deuda, por el exorbitante valor que había alcanzado, y consintió, en cambio, en la emancipación del condado.*
>
> *De igual índole es el caso del herrero que pidió al caballero un céntimo por el primer clavo de las herraduras de su caballo, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto, etc.*

El tablero de ajedrez

Es más conocido el clásico problema del tablero de ajedrez: el rey de la India quiso recompensar al inventor del ajedrez y éste accedió pidiéndole un grano de arroz por la primera casilla del tablero, dos granos por la segunda, cuatro por la tercera, y así sucesivamente doblando la cantidad de granos respecto a la casilla anterior y hasta la casilla número 64.

En el tablero de ajedrez, el número de granos por casilla crece en progresión geométrica de periodo dos ($2^0 = 1$, 2^1, 2^2...), de modo que, si el tablero tiene n casillas, la última contendrá 2^{n-1} granos. La suma de los granos de las dos primeras casillas es $1 + 2 = 1 + 2 \times 1 = 1 + 2 \times (2 - 1)$; para las tres primeras casillas (hasta la que contiene 4 granos) es $1 + 2 + 4 = 1 + 2 \times 3 = 1 + 2 \times (4 - 1)$; para las cuatro primeras (hasta la que contiene 8) es $1 + 2 + 4 + 8 = 1 + 2 \times 7 = 1 + 2 \times (8 - 1)$; la suma siguiente (hasta la que contiene 16 granos), $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 1 + 2 \times 15 = 1 + 2 \times (16 - 1)$... Podemos escribir la suma de la primera casilla, que sólo contiene un grano, como $1 = 1 + 2 \times 0 = 1 + 2 \times (1 - 1)$.

La suma de granos hasta una casilla determinada será igual a 1 más el doble de los granos de la casilla menos uno. Por ejemplo, para la décima casilla, con $2^{10-1} = 512$ granos, la suma será $1 + 2 \times (512 - 1) = 1023$. Para la casilla n, la suma será $1 + 2 \times (2^{n-1} - 1)$. El tablero tiene $n = 64$ casillas y el total de granos es $1 + 2 \times (2^{64-1} - 1)$.

La leyenda del inventor del juego de ajedrez y del rey de la India que quiso recompensarlo, la de la fundación del Reino de Castilla, la de los clavos de la herradura y la realidad del interés compuesto durante un periodo de tiempo lo bastante largo se basan en el carácter acumulativo de cantidades que, inicialmente mínimas, se multiplican extraordinariamente debido al factor de crecimiento. Estalella situó conocimientos matemáticos idénticos en una diversidad de contextos para que cada persona escogiera el contexto que le resultara más interesante.

5

Hacia un enfoque integrado

«Para articular y organizar los conocimientos y, por medio de ello, reconocer y conocer los problemas del mundo, se hace necesaria una reforma del pensamiento».

EDGAR MORIN (2001: 29)

DE LOS CAPÍTULOS ANTERIORES, se deduce que el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad son principios que deben trabajarse e interrelacionarse en base a otros principios comunes. A lo largo del libro, hemos hecho especial referencia a cuestiones de contextualización y de globalización, aunque no siempre han sido referencias suficientemente explicitadas. En este último capítulo, elaboramos argumentos para defender nuestra tesis principal:

> Una educación matemática inclusiva —basada en el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad— tiene que destacar los contextos donde se piensan las prácticas, los grupos de conocimientos implicados y la especificidad de las personas en la reformulación de contenidos matemáticos.

Hasta el momento hemos defendido la complementariedad de diversos tipos de tareas para la construcción de una educación matemática inclusiva de calidad. Ahora, pasamos a defender la complementariedad de diversos tipos de conocimientos en la organización y dinamización de estas tareas. Para pensar críticamente, manipular, jugar y atender la diversidad en un entorno de educación matemática de calidad, no sólo son necesarios conocimientos sobre las matemáticas. Además de conocimientos sobre uno mismo, son del todo imprescindibles:

– Conocimientos sobre el mundo: *contextualización*.
– Conocimientos sobre otras materias: *globalización*.

Contextualización y globalización hacen referencia a dos tipos de conocimientos que, de forma interrelacionada, inciden inevitablemente en nuestra comprensión e interpretación de la práctica matemática. A partir de la interrelación de estos tipos, se deduce qué temas y acciones son relevantes en el desarrollo de una práctica matemática, cuáles son secundarios y cuáles ni siquiera deberían considerarse. Cuando, por ejemplo, se plantea la tarea de resolver si hay dos personas en el mundo con la misma cantidad de cabellos, se descarta la acción experimental de contar la cantidad de cabellos de varias personas porque se recurre como mínimo a un conocimiento del mundo —hay 6.500 millones de habitantes en la Tierra—, a un conocimiento de otras materias —el promedio de cabellos de una persona es de 150.000 a 200.000— y a un conocimiento de uno mismo —«resolví un problema parecido usando una situación con palomas y palomares».

Naturalmente, hay tareas que no facilitan del mismo modo los procesos de contextualización y globalización. La búsqueda del resultado de la raíz cuadrada de una cantidad es una tarea matemática que no promueve el pensamiento crítico, la manipulación, el juego ni la atención a la diversidad —tal como lo hemos caracterizado en este libro—, ni tampoco la interrelación de tipos de conocimientos distintos a los matemáticos. Aunque las tareas de carácter rutinario son necesarias en una educación matemática equilibrada, no deberían ser representativas de esta educación. Más allá de que en su gestión pudiera haber aspectos de manipulación, juego y/o atención a la diversidad, no se estaría dando prioridad a un aprendizaje matemático contextualizado ni globalizado.

De la contextualización, el filósofo Edgar Morin (2000) dice que es imprescindible para no caer en la trampa de considerar el conocimiento (matemático) como un conjunto de informaciones alejadas de la realidad. El conocimiento ha de situarse en su contexto para que adquiera sentido. Por ejemplo, la noción de símbolo, contenido matemático asociado a la representación —uno de los procesos básicos del aprendizaje de las matemáticas junto con la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y las conexiones (NCTM, 2000)—, inicialmente aparece relacionada con el aprendizaje de la lectoescritura. Más tarde, se asocia a la construcción del lenguaje matemático y de este modo se explica en las primeras edades. No obstante, para la comprensión de la noción de símbolo se hace necesaria su contextualización en las situaciones donde se aplica. Hay símbolos en el aparato de teléfono, en las etiquetas de la ropa, en las señales de tráfico, en las guías de calles, en las portadas de diarios..., y en cada contexto se usan con finalidades distintas.

Cuando se dice que el rendimiento en matemáticas está asociado a la competencia en comprensión de textos, a menudo se olvida que la comprensión de textos es mucho más que la capacidad de descodificar. Quien escucha o lee un problema de matemáticas, ha de ser capaz de entender el significado de las palabras en el contexto de sus experiencias y en relación con su conocimiento del mundo. Sin embargo, muchas personas creen que el aprendizaje matemáti-

co, a medida que avanza, se encamina hacia la elaboración de conocimientos cada vez más abstractos. En este libro defendemos que el aprendizaje matemático debería avanzar hacia la contextualización: cuanto más maduro, más contextualizado. Si lo que se aprende no tiene cabida en el conocimiento del mundo real, lo aprendido tiene una validez limitada, probablemente se olvidará y difícilmente se usará. La abstracción no es un propósito principal de la educación matemática, sino una característica fundamental de la disciplina que se enseña.

La abstracción puede pensarse como la idea opuesta a la contextualización. Abstraer significa sacar una noción u objeto de su contexto y colocarlo en un entorno conceptual especializado. Ni la noción de símbolo ni una ecuación de primer grado deberían abstraerse de las condiciones bajo las cuales se usan. La matemática que la educación toma como objeto es en gran medida abstracta. Pero la matemática que se aprende en un determinado tiempo y espacio es el resultado de un conjunto de conocimientos concretos que han de interpretarse por personas concretas con ciertos conocimientos previos en constante proceso de cambio. Estas personas son diferentes entre ellas y, a su vez, comparten necesidades y contextos de práctica. De acuerdo con estas consideraciones, dar prioridad a la abstracción de la matemática es un modo de despersonalizar el aprendizaje y, por tanto, obstaculizarlo.

De la globalización, Morin (2000) dice que es una asignatura pendiente en los sistemas escolares actuales. Hay una gran distancia entre nuestros saberes fragmentados y las realidades globales que estos saberes pretenden contribuir a explicar. Estudiamos el cálculo separado de la geometría, la geometría separada de las artes plásticas, las artes plásticas separadas de la literatura, y así con las distintas materias escolares. Pero el mundo no está organizado ni compartimentado de este modo. La comprensión del mundo obliga a pensarlo en base a la articulación de múltiples perspectivas. La mirada desde una única perspectiva, junto con la especialización propia de nuestra sociedad impiden desarrollar una visión de conjunto de situaciones y problemáticas que, paradójicamente, han de incorporar esta visión para ser comprendidas.

Existe, sin embargo, una excepción a la situación generalizada de los sistemas escolares de la que habla Morin. Nos referimos a las Escuelas infantiles, como las llamamos en España, o las *Kindergarden*, como las denominan en diversos países europeos y americanos. Los profesionales de estos centros en los que se educan —no sólo se cuidan— niños de 0 a 3 años, suelen tener muy claro el enfoque globalizador. Aunque en diversos países como el nuestro se da una escasa importancia a la educación en este ciclo —falta de consideración profesional de los trabajadores de estos centros en las leyes de educación, baja remuneración económica en relación al resto de profesionales de la educación, etc.—, pensamos que los educadores, ya sean matemáticos o de cualquier otra disciplina, deberían conocer qué tipo de trabajo se realiza, cómo se realiza y por qué se realiza de esta forma y no de otra. No pretendemos generalizar, ya que probablemente hay excepciones que podrían rebatir nuestro argumento,

pero nos atrevemos a afirmar que la tendencia general en educación consiste en sectorizar el conocimiento, sea matemático o de cualquier otra índole. La práctica más extendida consiste en «secundarizar» la Educación Primaria y, lo que todavía es peor si cabe, «primarizar» la Educación Infantil, cuando lo que debería priorizarse es la «infantilización» de la Educación Primaria y de la Educación Secundaria, en términos metodológicos, claro está. De esta forma, se garantizaría un enfoque contextualizado y globalizado, y se podría superar con buena nota esta asignatura pendiente.

Una educación matemática de calidad requiere que los principios de pensamiento crítico, manipulación, juego y atención a la diversidad sean interpretados desde la globalización. En este caso, globalizar significa integrar diferentes grupos de conocimientos a medida que se avanza en la profundización de contenidos matemáticos. Por un lado, hay que relacionar conocimientos matemáticos entre ellos y, por otro, hay que relacionar estos conocimientos con otros propios de ámbitos disciplinarios distintos: ciencias, lengua, tecnología, arte, etc. Naturalmente, no está claro hasta donde llega cada disciplina (Becher, 2001). Empieza a hablarse de la estadística, por ejemplo, como si se tratara de una disciplina separada de las matemáticas. Es probable que al hablar de la necesidad de conectar conocimientos de distintas disciplinas, estemos en realidad hablando de conectar conocimientos que deberían verse mucho más cercanos desde un punto de vista disciplinario. En cualquier caso, la necesidad de globalizar es real.

De algún modo, globalizar es un paso más que contextualizar (Faurez, 2008). Cuando se contextualiza una actividad matemática, se sitúa en relación al mundo. Cuando esta actividad se piensa de forma globalizada, se sitúan cuestiones particulares en un entorno más amplio. Este entorno puede surgir del ámbito de las matemáticas para incluir conocimientos de otros ámbitos o situar conocimientos matemáticos específicos en relación con otras parcelas de la matemática. Asumimos, por tanto, que el desarrollo conjunto de ciertas habilidades mejora la comprensión de estas habilidades tratadas por separado. Si alguien trabaja unos contenidos de álgebra en combinación con otros de demografía, entenderá aspectos de ambos grupos de contenidos a los que no tendría acceso si sólo los hubiera tratado de forma aislada.

Morin (2002) también habla de la necesidad de avanzar en el conocimiento sobre uno mismo, que a menudo llama «capacidad de personalización». Dice de la capacidad de personalización que genera implicación en la construcción de conocimiento contextualizado y globalizado. En la cultura occidental, los principios de especialización y abstracción del conocimiento han obstaculizado el desarrollo de la creatividad, y en concreto de los procesos de personalización, que se han pensado principalmente como un terreno libre de restricciones donde todo vale. En el ámbito de la educación matemática, al asociarse a una falta de normas, la creatividad no ha sido considerada con la suficiente intensidad. Esta situación ha desincentivado la personalización

como valor del pensamiento matemático. Sin embargo, la práctica matemática tiene sentido en tanto que la piensa una persona. Cuando alguien formula un problema, está creando un enunciado en base a experiencias personales que llevan a identificar una situación como problemática. Este enunciado, por tanto, se ajusta a experiencias y ha de expresarse de manera que otras personas con otras experiencias puedan interpretarlo. Así, formular un problema es una acción creativa, de personalización, distinta a leer un problema que alguien ha formulado.

La educación matemática de calidad plantea problemas para ser resueltos, proporciona materiales manipulables y juegos y contrasta prácticas matemáticas diversas. Aún así, todas estas prácticas no son buenas en sí mismas, educativamente hablando. Hay que ubicarlas en entornos donde la contextualización, la globalización y la personalización sean principios fundamentales. El trabajo de actividades donde se pide la formulación de problemas, el diseño de materiales y juegos y la búsqueda de diferencias en las maneras de pensar las matemáticas han de contribuir en la promoción de estos tres principios transversales. Se trata de promover la creatividad de las personas sin olvidar que el aprendizaje de las matemáticas requiere compartir significados en un contexto determinado y de acuerdo con muchos otros significados.

CONTEXTUALIZAR Y GLOBALIZAR EN EL ENTORNO ESCOLAR

Cuando Clifford Geertz (1994) dice que hay que empezar a pensar sobre la manera como pensamos, sugiere una actitud de reflexión crítica similar a la apuntada por Edgar Morin (2000) en *La mente bien ordenada*. En el entorno escolar y en el aula de matemáticas, es fundamental pensar sobre la manera como pensamos. Para ello, conviene ver el pensamiento crítico como el principio activo que engloba a todos los demás. Las tareas de manipulación, de juego y de atención a la diversidad han de desarrollarse de modo que activen procesos de pensamiento crítico y, a su vez, este pensamiento habrá de facilitarse en base al desarrollo de algunas de estas tareas o de todas ellas. Sin embargo, incluso cuando estos procesos de pensamiento incluyan aspectos de manipulación, juego y atención a la diversidad, no serán completos si se desarrollan en el ámbito exclusivo de las matemáticas sin incorporar contextos cercanos de la vida cotidiana, o bien contextos proporcionados por otras materias escolares.

La mayoría de tareas matemáticas se centran en los conocimientos sobre las matemáticas y no en los conocimientos sobre el mundo. Una de las consecuencias de este enfoque es que se piensa sin contextualizar —ya sea manipulando, jugando y/o atendiendo a la diversidad—, llegándose a penalizar en algunas ocasiones a quien piensa contextualizando. Sin embargo, no hay confrontación entre unos y otros conocimientos, aunque a menudo se plantee de este modo en el entorno escolar. Para trabajar bien las matemáticas han

de trabajarse bien los conocimientos de los mundos físico y social; muchos de ellos ayudan a anticipar el desarrollo de los procesos de pensamiento y, después, contribuyen a validarlos. Cuando alguien piensa matemáticamente, debería apelar a multitud de conocimientos construidos a lo largo de su experiencia. Cualquier respuesta o resolución en matemáticas debería surgir de integrar procesos de inferencia basados en conocimientos de ámbitos distintos.

Si bien es cierto que en algunos contextos y ocasiones puede resultar conveniente presentar las matemáticas como una materia distinguible de las otras, en general esta conveniencia se debe a requerimientos de tipo institucional —elaboración de un currículo «de» matemáticas, identificación del colectivo de profesores «de» matemáticas, etc.— y no tanto a cuestiones sobre la enseñanza y el aprendizaje en el aula. El hecho de plantear las matemáticas como un objeto de enseñanza y aprendizaje ha de tener consecuencias desde el punto de vista del trato dado a la disciplina. No es lo mismo situar el concepto de fracción en una listado —subjetivo— de los cien conceptos clave en matemáticas, que pensar en cómo enseñar este concepto. Para la primera actividad, basta con pensar la matemática como una disciplina razonablemente estable y delimitada. Para la segunda actividad, sin embargo, conviene pensar en qué otras disciplinas y conocimientos del mundo tiene sentido pensar el concepto fracción.

El entorno escolar requiere que la práctica matemática sea complementada con conocimientos del mundo para así poder mejorar la comprensión de nociones y procedimientos implicados. El hecho de que los conocimientos sobre el mundo deban ser considerados para dar sentido a la práctica matemática, no impide que conocimientos especializados sobre las matemáticas interactúen con los primeros para desarrollar una comprensión más madura de lo que se observa y experimenta. Del mismo modo, tampoco debe obviarse el conocimiento del mundo en la práctica matemática, ni debería obviarse el conocimiento matemático en las acciones y decisiones del día a día.

Como decíamos, en ciertas ocasiones, incorporar el conocimiento del mundo en la práctica matemática puede ser un elemento distorsionador. Muchos de los teoremas matemáticos han sido enunciados y demostrados sin referencias directas a objetos del mundo. En este libro, sin embargo, no hablamos de la matemática de los matemáticos profesionales, sino de una educación matemática para la ciudadanía. Para el ciudadano, la matemática debe ser primero un recurso imprescindible de comprensión e interpretación del mundo, y sólo en los casos de algunos ciudadanos adultos, un espacio de construcción de teoremas y modelos. Con ello no sugerimos que deba abandonarse el aprendizaje matemático de estructuras básicas puesto que estas estructuras han de verse como elementos mediadores en la comprensión del mundo. Las matemáticas son algo más que secuencias de razonamientos inferenciales elaboradas en base a un discurso especializado. Deberían interpretarse como un

recurso para comprender distintos acontecimientos y, en definitiva, como una fuente de conocimiento del mundo.

En otras partes del libro, hemos dado ejemplos de problemas situados en contextos desconocidos para quien debía resolverlos. La anécdota que contaba Paulus Gerdes y de la que ya hemos hablado, sobre las escaleras mecánicas en libros de texto de matemáticas de Mozambique, pone de relieve las dificultades en el uso del contexto. No siempre se dispone de conocimientos sobre el mundo y sobre otras materias que permitan disponer de la información necesaria para interpretar el contexto dado por el enunciado de un problema. La ausencia de conocimientos no matemáticos puede llegar a ser un auténtico obstáculo en la resolución de problemas matemáticos. Los jóvenes de Mozambique, por ejemplo, no habían visto nunca una escalera mecánica —conocimientos del mundo—. En el caso del problema de los productos *light*, también comentado en este libro, la confusión entre los conceptos de grasas, azúcares y calorías —conocimientos de ciencias— deviene una gran dificultad que impide pensar correctamente la definición de *light*. En realidad, muchas dificultades en el rendimiento matemático pueden explicarse en términos de déficit o de falta de actualización respecto a conocimientos no matemáticos.

Al problema de pensar sin contextualizar hay que añadir el problema de pensar sin globalizar. La creciente especialización del conocimiento ha generado las condiciones para la emergencia de nuevas formas de relación entre las matemáticas y los mundos físico y social. Esta relación es importante no sólo desde el punto de vista del aprendiz, sino también desde la dinámica de construcción dentro de la propia disciplina matemática. El conocimiento sobre las matemáticas no puede desvincularse del conocimiento sobre otras materias, del mismo modo que no debería separarse del conocimiento sobre el mundo. A pesar de ello, en el entorno escolar cada vez es más habitual tratar temas específicos dentro de los límites de una disciplina, sin relacionarlos con conocimientos de otras disciplinas. Una actividad matemática basada en el pensamiento crítico, la manipulación, el juego o la atención a la diversidad debería incorporar en cierta medida referencias a otras áreas disciplinares.

En general, el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad han de gestionarse de manera que integren conocimientos matemáticos, cotidianos, junto con otros de tipo académico no matemáticos. Esta demanda es muy compleja, por lo que bastará con introducir unos pocos conocimientos no matemáticos de forma explícita y justificar su conexión con la tarea matemática. Llegar a ser conscientes del carácter globalizador del conocimiento pasa por poner en práctica enfoques multidisciplinares, interdisciplinares y transdisciplinares en el trabajo de cualquier propuesta de aula. Las actividades del capítulo 1, por ejemplo, pueden mirarse como pequeños proyectos de aula que deben facilitar aproximaciones a este triple enfoque que, según Morin (2002), es el que lleva al conocimiento auténtico.

Cuando usamos los términos multi/inter/transdisciplinar estamos recurriendo a una forma de organización de los contenidos del conocimiento basada en lo disciplinario. Naturalmente, esta forma de organización es bastante discutible e incluso confusa. Ya hemos comentado que no está claro hasta dónde llega cada disciplina. Por otra parte, el énfasis en lo disciplinario sugiere que el acceso a los contenidos debe hacerse desde las disciplinas, de modo que debe ser guiado por los expertos correspondientes. En un libro de «matemática inclusiva», este supuesto resultaría sorprendente por su carácter excluyente. Para nosotros, lo relevante no son las disciplinas sino las posibilidades de relacionarlas y de ir más allá de ellas tomando las matemáticas como punto de partida. El aislamiento del conocimiento matemático respecto a otros tipos de conocimiento, lo unidisciplinar, no permite responder los interrogantes del mundo por lo que la especialización matemática aparece como necesaria pero no suficiente.

Para muchos educadores matemáticos, la práctica unidisciplinar ha sido bastante frecuente, no solo en el aula sino también en sus entornos cotidianos y en sus formas de interpretar el mundo. Recientemente, asistimos a una reunión con otros profesores de matemáticas convocada en casa de uno de ellos. El anfitrión nos condujo al despacho de su casa, donde había un póster de Albert Einstein colgado en la pared. Uno de los profesores del grupo exclamó: «¡Claro! Tú no eres matemático, ¿verdad? ¿Estudiaste Físicas?». El anfitrión sonrió mientras explicaba en qué universidad había estudiado lo que él denominó Ciencias Exactas. Es sólo una anécdota, pero revela hasta qué punto la percepción por separado de las disciplinas puede llevar a pensar que el póster de un físico lo escoge un físico y no un matemático.

En el caso del aula, las formas de trabajo asociadas a un enfoque unidisciplinario se caracterizan por la precisión de objetivos de aprendizaje muy concretos establecidos de antemano. Se puede ser unidisciplinar, por ejemplo, al resolver una ecuación de primer grado. Sin embargo, es difícil mantener este enfoque con otras clases de tareas. En el Capítulo 1, el problema en torno a los productos *light* es un buen ejemplo de la insuficiencia del conocimiento sobre las matemáticas. La comprensión de lo que significa *light* en la sociedad actual, junto con la relevancia de este término en la explicación de muchos comportamientos, forma parte de la complejidad del conocimiento matemático situado en el enunciado de este problema. Por otra parte, al tratarse de un problema con un enunciado suficientemente abierto («¿cuándo decimos que un producto es *light*?»), pueden necesitarse distintos conocimientos en función de las preguntas que se formulen para interpretar la cuestión planteada.

Ser capaz de globalizar es ser capaz de interpretar y resolver un problema por medio de la integración de experiencias y conocimientos. En el caso de los productos *light*, el desconocimiento de cuestiones de biología para interpretar correctamente la información nutricional de los envases puede originar importantes dificultades en el proceso de resolución matemática del proble-

ma. Aquí, todos los conocimientos tienen el mismo valor en cuanto a su importancia en el proceso de resolución del problema —saber aplicar una regla de tres entre porcentajes es tan necesario como saber distinguir kilocalorías de kilojulios—. Lo mismo ocurre con el uso de las regletas en el Capítulo 2 o con el juego «*¿Quién tiene?... Yo tengo*» del Capítulo 3: ser capaz de asociar una multiplicación a un rectángulo o a un cuadrado, y no exclusivamente a una operación escrita, o relacionar el contenido de unos recipientes determinados con la compra semanal en el supermercado deberían ser prácticas habituales que permitirían evidenciar esta capacidad de globalizar en la que queremos incidir. En lo que respecta a los objetivos de enseñanza, aprendizaje y evaluación, puede decidirse no considerar todos los conocimientos por igual pero, aún así, todos son necesarios para avanzar en la tarea.

Los problemas matemáticos basados en enunciados con contextos de la vida real, facilitan que el aprendiz proyecte experiencias propias acerca de la situación o problemática que se quiere interpretar y resolver. Desde esta perspectiva, la resolución completa de un problema es el resultado de un proceso participativo de varias personas con experiencias relacionadas con el problema. Dejar a alguien fuera del proceso de resolución significa perder oportunidades de profundizar en la interpretación del problema. De acuerdo con esto, los comportamientos inclusivos son adecuados para las relaciones dentro de un grupo, pero también para los avances dentro de la propia actividad matemática. La socialización de la práctica matemática permite ver su complejidad y relacionarla con otras prácticas cotidianas y/o disciplinarias. Uno de los objetivos de este libro es precisamente facilitar la mirada a lo matemático en tanto que proceso social, que se construye desde la interacción entre conocimientos y personas.

Para fomentar esta interacción, a lo largo del libro hemos propuesto formas de reconstruir la relación de las personas con las matemáticas a través de diversos principios fundamentales de la educación matemática: el pensamiento crítico, la manipulación de materiales, el juego y la atención de la diversidad. Una educación matemática basada en estos principios tiene que destacar, a su vez, los principios más generales de contextualización en los lugares donde se llevan a cabo las prácticas; globalización de los grupos de conocimiento implicados; y personalización de los contenidos matemáticos en función de la especificidad de cada persona. A continuación consideramos unos y otros principios por medio del trabajo por proyectos y por competencias matemáticas.

El papel del Trabajo por Proyectos

El *trabajo por proyectos* es una buena manera de hacer operativo un enfoque integrado (Giménez y otros, 2004; Grupo Vilatzara, 2006; Grupo EMAC, 2008). Por medio de un proyecto es posible volver a unir conocimientos que han sido

fragmentados y ubicados en disciplinas distintas. El conocimiento de la dimensión espacial, por ejemplo, forma parte de las matemáticas y también de la geografía. Difícilmente se dará la importancia necesaria al estudio de la dimensión espacial si no se integran aspectos de matemáticas y de geografía en una misma propuesta curricular. El mito del matemático como «sintetizador» del conocimiento del espacio y el del geógrafo como «usuario» de este conocimiento son poco acertados. Matemáticos y geógrafos sintetizan y al mismo tiempo usan la dimensión espacial, aunque con objetivos distintos. De ahí que el concepto de espacio —que nosotros escogeríamos para el listado de los cien conceptos clave en matemáticas— tenga que situarse en varios ámbitos académicos.

Los proyectos pueden prestar especial atención al pensamiento crítico, la manipulación, el juego y/o la atención a la diversidad, pero por su propia naturaleza han de promover el conocimiento contextualizado y globalizado. El trabajo por proyectos puede centrarse en el principio de manipulación. Podría, por ejemplo, idearse un proyecto en torno al descubrimiento de las posibilidades de un ábaco (ver Capítulo 2), relacionándolas con algunas de las particularidades culturales de este instrumento. También puede diseñarse un proyecto que destaque el principio de juego. Un ejemplo sería investigar y comparar las diferentes estrategias relacionadas con la práctica del awalé (ver Capítulo 3). Otros proyectos pueden centrarse en el principio de atención a la diversidad. En este sentido, podría pensarse un proyecto basado en la exploración de modos de sumar en distintos contextos culturales (ver Capítulo 4). En cualquier caso, desde unos u otros proyectos se deberá dar prioridad al trabajo del pensamiento crítico, en tanto que principio que ha de englobar a todos los demás en el entorno del aula. No es lo mismo mostrar cómo se suma en otras culturas que crear una situación donde los alumnos tengan que explorar cómo ha sumado una determinada persona.

Trabajar el pensamiento crítico, la manipulación, el juego o la atención a la diversidad por medio de proyectos favorece el acceso al conocimiento en base a un aprendizaje significativo. Es también una manera de abordar los contenidos escolares de manera integrada, colaborativa y comprometida, generalmente a partir de un tema que sugieren los propios alumnos. La selección del tema, sin embargo, no significa que el trabajo de un proyecto vaya a ser una propuesta metodológicamente democrática. El aprendiz sólo decide en parte los objetivos y contenidos del proyecto; la otra parte se decide desde las propias disciplinas involucradas y en base a los conocimientos de los otros. Lo que es democrático es el proceso de construcción conjunta de conocimiento y de intercambio que se facilita. Las personas que participan en un proyecto son conscientes de su participación; esto hace que construyan conocimiento en una situación de máxima responsabilidad y compromiso con otras personas. Esta forma de trabajo caracteriza la práctica matemática como un proceso social donde tienen cabida conocimientos de distintos ámbitos, dándose valor a estos conocimientos en función del contexto particular donde se proponga su uso.

Aunque por medio de un texto escrito es difícil dar a conocer proyectos para el trabajo de matemáticas, damos algunas pautas a considerar en la planificación y gestión de otras actividades susceptibles de ser convertidas en proyectos de aula. Para acabar queremos ejemplificar, a través de una de las actividades expuestas en el primer capítulo, aquellos aspectos que la hacen adecuada como punto de partida para el trabajo por proyectos. La actividad sobre la definición de producto *light* se centra en una pregunta significativa en la sociedad actual e importante en el contexto de jóvenes de enseñanza secundaria. Se trata de una actividad que requiere trabajo de campo por medio de la exploración de materiales manipulables, en este caso, envases de diversos productos alimentarios accesibles en cualquier supermercado. El tema escogido garantiza la presencia de un contexto real para todos los alumnos, junto con la necesidad de tareas de globalización con contenidos de ciencias naturales y ciencias sociales, entre otras materias. En función de los contenidos sugeridos, puede ser una actividad adecuada para el primer ciclo de Educación Secundaria (12-14 años) o para el segundo ciclo (14-16).

Desde un punto de vista matemático, la actividad requiere el uso correcto de porcentajes y de relaciones entre porcentajes, además de la operación de unidades de medida y la conversión de unas unidades a otras. Es interesante hacer notar a los alumnos que algunos envases consideran la cantidad de kilocalorías por cada 100 mililitros mientras que otros consideran la cantidad de kilojulios o toman 50 mililitros como referencia. En la comparación de productos, hay que fijar unidades e intervalos de referencia, pero también conviene discutir por qué las etiquetas de unos productos son distintas de las de otros en relación a estos aspectos. Esta última cuestión ya no es propiamente del ámbito de las matemáticas, aunque ayuda a comprender las decisiones que puedan tomarse en este ámbito. De hecho, la primera aproximación al problema, antes de llegar al estudio del valor energético de los productos, requiere ser capaz de identificar el papel esencial del concepto de caloría, distinguiéndolo de otros conceptos susceptibles de ser percibidos como similares o iguales (azúcares, grasas, lípidos, etc.).

La actividad es especialmente relevante en cuanto a su valor formativo y social. La exploración de porcentajes y medidas en el contexto de productos alimentarios contribuye a la formación académica de los alumnos y les prepara para su integración activa y crítica en la sociedad. Descubrir que los productos *light* no siempre «engordan» menos que sus productos de referencia no *light*, puesto que ser *light* no tiene que ver con grasas ni azúcares sino con calorías, es algo sorprendente para los alumnos y quizás para muchos adultos. También es sorprendente descubrir que la normativa para los productos *light* no es la misma en todos los países europeos o que en algunos de estos países ni siquiera hay normativa al respecto, sólo recomendaciones. Estas informaciones ponen de relieve una función de orientación y de socialización del alumno en tanto que ciudadano que compra o conoce a alguien que compra productos *light*.

La atención a contenidos con valor personal y social fuera del entorno escolar permite tener en cuenta la experiencia vivida del alumno como una fuente de información. Se usa lo que se sabe —sobre los productos *light*— como punto de partida de las estrategias de aproximación al problema y de algunos de los razonamientos posteriores, aunque éste no sea el modo habitual de proceder en el aula de matemáticas. A menudo, cuando no se presta suficiente atención a los principios de contextualización y globalización, la experiencia vivida se subestima frente a la formación académica. En caso contrario, poder usar un cierto conocimiento del mundo en el desarrollo de la práctica matemática permite asumir mayores niveles de control y responsabilidad sobre el propio aprendizaje.

La aplicación de procedimientos distintos a los comúnmente usados en el aula para resolver problemas caracteriza el trabajo por proyectos. Así se facilita la inclusión de alumnos que suelen sentirse alejados del quehacer escolar y se contribuye a que otros alumnos construyan distintos modos de aproximación al conocimiento. En general, la introducción de contextos reales —por medio de recortes de prensa, materiales de la vida cotidiana, fotografías, etc.— facilita la aparición de conocimientos diferentes de los que se usan en el aula de matemáticas. Con los productos *light*, los alumnos que los consumen desarrollan una representación de la tarea y de lo que significa resolverla distinta de aquellos que no los consumen o que no están familiarizados con ellos; entre estos últimos, quienes han interiorizado fuertemente el lenguaje escolar desarrollan una representación distinta de quienes son capaces de pensar independientemente de las normas establecidas en el aula.

Para el avance en la resolución de problemas, es conveniente seguir estrategias de aprendizaje activo como la observación de los envases, la exploración de la información escrita en ellos, la socialización de la información recogida por diferentes personas y la comunicación de resultados para que puedan ser validados o refutados. La actividad admite una mirada a la realidad desde diferentes enfoques, desde la perspectiva dada por las estadísticas de los componentes nutricionales de los productos hasta la perspectiva dada por el conocimiento de estrategias de publicidad de las empresas. El carácter globalizador de la tarea tiene que ver con ser capaz de usar conocimientos de distintos ámbitos en la formulación de argumentos. Otro aspecto es ser capaz de comprender y discriminar mensajes de los medios de comunicación y de los productos publicitados escritos por medio del lenguaje matemático: el lenguaje geométrico de las formas de los envases, el lenguaje aritmético de la información nutricional, etc.

El ejemplo de actividad seleccionado para este apartado es una manera particular de entender el trabajo por proyectos en el aula. Cuando se habla de trabajo por proyectos, no es posible hacer una reducción tal que se pretenda hacer referencia a todas las tipologías de este método. No hemos hablado de la noción misma de trabajo por proyectos; en su lugar, hemos explicado por

qué algunos de nuestros ejemplos de actividades admiten ser vistos como proyectos. A menudo, cuando se menciona el término proyecto, se tiende a imaginar actividades de gran envergadura en cuanto al tiempo, los recursos necesarios y el grado de innovación y cambio (Irurzun, 2000). Para nosotros, sin embargo, hay una idea de proyecto ligada en primer lugar a cuestiones de contextualización y globalización, para las cuales no siempre se requieren varias sesiones de clase, ni excesivos recursos humanos y físicos, ni siquiera ambiciosos planteamientos de cambio.

En general, a lo largo de todo el libro, los ejemplos se han escogido de acuerdo a unos principios de calidad y teniendo en cuenta las facilidades en su implementación. Ninguno de estos dos criterios ha impuesto renuncias en el otro. Todas las actividades han resultado de gran riqueza en los contextos donde las hemos llevado a cabo. Aunque el concepto de *matemática inclusiva* sea en cierta medida revolucionario, por la situación actual de la propia educación matemática, creemos firmemente que su operativización ha de basarse en propuestas de acciones posibles y de alcance gradual. En particular, recomendamos partir de una formación profesional basada en la propuesta de tareas y metodologías validadas que los profesores puedan implementar en las aulas. Probablemente no sea necesario un cambio radical de ideas, una «revolución» en su totalidad, sino un saber dar la vuelta a la forma de ver ciertas cosas.

El papel del trabajo por competencias matemáticas

Para que se consolide un enfoque integrado en el aula de matemáticas, es necesario que paralelamente este enfoque caracterice en parte el conjunto de medidas adoptadas en la formación profesional del profesorado (Alsina, À., 2007). Afortunadamente, estamos en una buena posición de partida. Cada vez son más frecuentes las políticas de formación profesional centradas en el desarrollo de competencias y de principios de inclusión social. En la actualidad y en nuestro contexto local, se dice que no es posible lograr aprendizaje matemático si no hay logro de competencia matemática. La noción misma de competencia asume la necesidad de introducir tareas de contextualización, globalización y personalización. Se acepta que saber matemáticas es saber usarlas en los múltiples contextos de referencia de un texto leído, vivido, escrito (Ortega, 2005).

Por un lado, una formación profesional de calidad tiene que introducir el término competencia y ofrecer ejemplos de actividades y metodologías de aula que concreten su uso. Por otro lado, la calidad también tiene que consistir en posibilitar la construcción de nuevas necesidades profesionales en aquellos grupos de profesores que, por diversas razones, no consideran útil —oportuno, pertinente...— un enfoque integrado en base al trabajo de competencias en sus clases de matemáticas. Para unos y otros profesores, recomendamos la lectura del Cuadro 5.1. En este Cuadro presentamos una rela-

ción de actividades genéricas del ámbito de matemáticas que, desde nuestro punto de vista, son válidas para contribuir a desarrollar progresivamente un enfoque integrado en educación matemática por medio del trabajo de competencias básicas. Para seleccionar estas actividades y categorizarlas en competencias básicas nos hemos basado en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen enseñanzas mínimas de la Educación Primaria en España; se trata de un documento normativo de referencia que ha sido utilizado por todas las Comunidades Autónomas del país con competencias en materia de educación y cuya validez trasciende, en nuestra opinión, la etapa de primaria.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2007) define la noción de competencia matemática en términos de la capacidad de una persona para identificar y entender el papel de las matemáticas en el mundo, para emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. De esta definición se infiere que la capacidad de plantear, formular, resolver, e interpretar problemas empleando las matemáticas ha de poder ponerse en práctica en una gran variedad de situaciones, desde aquellas sin una estructura matemática aparente hasta aquellas en las que el contexto matemático se hace explícito, como acostumbra a ser el caso de las situaciones de aula. En la vida cotidiana, las situaciones de práctica matemática aparecen por lo general poco estructuradas —por lo menos desde la perspectiva de las estructuras usadas en la organización de la matemática escolar— de modo que el aprendizaje matemático se convierte fundamentalmente en la capacidad para identificar y entender el papel de las matemáticas en el mundo.

De acuerdo con estas consideraciones, la competencia matemática (Niss, 1993) puede entenderse en primer lugar como competencia de identificación de estructuras y prácticas matemáticas en contextos escolares —más allá del aula de matemáticas— y también no escolares. En el Capítulo 1, la actividad del plano de un piso ilustra especialmente el trabajo de competencias de identificación de estructuras y prácticas matemáticas. Se trata de un ejemplo de actividad donde se pide al alumno que imagine algo que en algún momento de su vida se planteará, su piso ideal, aunque sólo sea para reconocer la distancia entre lo ideal y lo real. El plano dado —con un piso de apenas 55 metros cuadrados y dos habitaciones— puede representar el piso real que se consiga. Cuando alguien fuera del aula de matemáticas visualiza un piso ideal y lo compara con un piso concreto, puede ocurrir que no lleve a cabo prácticas matemáticas. Incluso dentro del aula de matemáticas, una actividad de este tipo puede interpretarse como «poco» matemática. Aquí, el carácter matemático de la actividad debe buscarse no tanto en la propia actividad sino en la capacidad de identificación de estructuras matemáticas de quien trate de resolverla.

COMPETENCIAS	MATEMÁTICAS
Competencia en comunicación lingüística y audiovisual	• Incorporar el lenguaje matemático y la precisión de su uso en la expresión habitual para mejorar las destrezas comunicativas. • Describir verbalmente razonamientos y procesos de resolución propios y escuchar explicaciones de los otros para fomentar la comprensión y el espíritu crítico.
Competencia matemática	• Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático representado por medio de lenguaje visual. • Relacionar hechos matemáticos y estructuras conceptuales básicas con propiedades del plano y del espacio. • Realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar, argumentar decisiones y elegir procesos para aprender a razonar. • Utilizar técnicas matemáticas básicas (contar, localizar, medir, diseñar, regular, razonar, etc.) e instrumentos básicos (calculadora, ordenador, etc.) para hacer matemáticas. • Diferenciar situaciones problemáticas complejas de tareas rutinarias donde se reproducen situaciones desproblematizadas. • Trabajar la comprensión de enunciados, la búsqueda de técnicas y estrategias y verbalizar procesos y resultados para aprender a resolver problemas. • Construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones diversas en las que estos conocimientos se sugieran con sentido. • Experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones para aprender a pensar matemáticamente. • Representar e interpretar procesos y resultados matemáticos a través de palabras, dibujos, materiales, símbolos, etc. • Comunicar oralmente y por escrito tareas matemáticas usando de manera progresiva y apropiada el lenguaje matemático.
Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico	• Construir y manipular mentalmente figuras planas y cuerpos tridimensionales para mejorar la visualización (de utilidad en el empleo de mapas, planficación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc.). • Medir en situaciones diversas usando progresivamente diferentes unidades (corporales, arbitrarias, normalizadas) para lograr un mejor conocimiento de la realidad, aumentar las posibilidades de interacción con ella y transmitir información cada vez más precisa sobre aspectos cuantificables.

Cuadro 5.1. *Actividades para fomentar un enfoque integrado en educación matemática* ⟶

© narcea, s. a. de ediciones

Competencias	Matemáticas
Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico	• Representar e interpretar gráficos para conocer y analizar mejor la realidad.
Competencia digital y en el tratamiento de la información	• Relacionar formas de expresar los números para facilitar la comprensión de información que incorpora cantidades o medidas. • Utilizar los lenguajes gráfico y estadístico para interpretar la información sobre la realidad. • Usar calculadoras y otras herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos.
Competencia social y ciudadana	• Trabajar cooperativamente en la realización de cálculos, medidas, resolución de problemas, etc. para aprender a aceptar ideas y puntos de vista de los otros.
Competencia cultural y artística	• Plantear actividades matemáticas básicas como contar, localizar, medir, diseñar, regular y explicar desde el punto de vista de su valor universal para dar a conocer su contribución al desarrollo cultural de la humanidad. • Reconocer y relacionar formas geométricas (líneas, figuras y cuerpos) para analizar y generar producciones artísticas a partir del conocimiento geométrico.
Competencia para aprender a aprender	• Utilizar capacidades lógicomatemáticas elementales (relacionar, transformar, etc.) para aprender contenidos no matemáticos. • Tomar decisiones, esforzarse, perseverar, etc. para resolver situaciones con estructura matemática. • Verbalizar el proceso seguido en el aprendizaje de las matemáticas para ayudar a regular y autorregular el propio conocimiento.
Competencia de autonomía e iniciativa personal	• Trabajar la comprensión de situaciones problemáticas para facilitar el diseño de planes de resolución. • Fomentar el uso de estrategias propias (dibujos, esquemas, cálculo mental o escrito, etc.) para aprender a gestionar recursos disponibles. • Evaluar periódicamente procesos de resolución para transferir y generalizar.

Cuadro 5.1. *Actividades para fomentar un enfoque integrado en educación matemática*

Uno de los peligros del enfoque integrado al que aludíamos al inicio de este capítulo tiene que ver con confundir la familiarización con los contextos sugeridos por una actividad con la práctica matemática relacionada con el desarrollo de esta actividad. Las preguntas de familiarización (¿a qué temas se refiere la actividad?, ¿cuánta información puede extraerse del texto gráfico?, ¿y del texto escrito?, ¿se echa en falta información en los textos gráfico y escrito?; ¿en qué situaciones de la vida cotidiana surgen actividades similares?, etc.) son el punto de partida para entender mejor dónde se aplicarán ciertas estructuras matemáticas y cómo y, a su vez, resultan imprescidibles para la posterior aplicación con sentido de estas estructuras. La adopción de un enfoque integrado significa, entre otras cosas, asumir que las preguntas de familiarización tienen la misma importancia que las preguntas directamente asociadas con fases más avanzadas del proceso de resolución (¿qué variables conviene fijar para que dos planos de piso sean comparables?, ¿es comparable un piso visualizado en tres dimensions con un piso representado en un plano?, ¿hasta qué punto la escala elegida en la representación de un piso influye en la percepción de su tamaño?, etc.), donde las estructuras matemáticas (de geometría plana, de relaciones plano-espacio, de proporcionalidad de variables, etc.) ya se hayan hecho evidentes.

En el proceso de validación de la actividad del plano del piso y de la metodología de conversación en el aula, asistimos a sesiones de clase gestionadas desde una visión predeterminada y cerrada de resolución. Algunos de los profesores dejaron que los alumnos razonasen y llegasen a conclusiones de forma autónoma. Sin embargo, en las discusiones conjuntas con los grupos-clase, obviaron aquellas conclusiones donde no se había tenido en cuenta la escala y la superficie del piso representado como elemento clave en su caracterización. Estamos ante una auténtica paradoja en el uso de problemas matemáticos contextualizados en situaciones extramatemáticas: se deja creer a los alumnos que tienen una considerable libertad de interpretación, pero al mismo tiempo se espera de ellos que introduzcan o acepten una interpretación en particular para garantizar la construcción de los conocimientos matemáticos que el profesor asocia de antemano al problema.

En general, plantear una sesión de clase de matemáticas en torno a actividades contextualizadas en situaciones extramatemáticas es un riesgo desde el punto de vista de la construcción de conocimiento matemático. Ciertas iniciativas de alumnos pueden dificultar la aparición de prácticas matemáticas que el profesor espera trabajar y estas iniciativas pueden incluso llevar a no trabajar contenidos específicos de matemáticas. Creemos haber argumentado suficientemente que vale la pena asumir este riesgo ya que se trata de un riesgo en beneficio de una mayor implicación del alumnado y de una educación matemática más significativa para todos. Sin embargo, nuestra apuesta por lo que hemos denominado un enfoque integrado en educación matemática, basado en el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la

diversidad, no se contradice con la formulación de dudas sobre la gestión de actividades de simulación de contextos reales y globalizados en el aula de matemáticas. La formulación de dudas debe entenderse como el compromiso de continuar profundizando en las ventajas y los inconvenientes de este tipo de actividades.

Desde un punto de vista histórico, la reflexión en torno al trabajo por competencias en educación matemática —saber cómo— se consolida cuando estas competencias se empiezan a situar en relación con los contenidos curriculares básicos en matemáticas —saber qué—. De ello se han encargado investigadores de gran prestigio como el matemático Mogen Niss y la propia corriente realista en educación matemática, con De Lange, Gravemeijer o Heuvel-Panhuizen, entre otros. Todos ellos han contribuido a avanzar hacia un mayor equilibrio entre una mejor comprensión cognitiva de los contenidos matemáticos y una mejor eficacia práctica en el uso de estos contenidos. Para la consecución de un buen aprendizaje matemático, los autores de la corriente realista, por ejemplo, creen necesario plantear situaciones problemáticas que lo sean desde una doble perspectiva dada por el dominio propiamente matemático y por los dominios de experiencia de los aprendices.

En mayo de 1994, en una conferencia ICMI —International Commission of Mathematical Instruction— en la Universidad de Maryland, Estados Unidos, Niss destacó la importancia de recuperar el énfasis en los contenidos matemáticos y de prestar mayor atención a ciertas estructuras conceptuales fundamentales de las matemáticas en los debates sobre competencias que ya empezaban a aflorar, especialmente gracias a la influencia de la corriente realista en el área. La aportación de Niss tuvo grandes repercusiones puesto que el ICMI es la principal organización internacional de educación matemática. En particular, minimizó los recelos de aquellos que consideraban el debate sobre competencias como un modo de alejarse de las demandas intelectuales de la disciplina matemática. Niss apostaba por una noción de competencia construida en torno a la idea de dominio de la disciplina y, al mismo tiempo, abierta a una concepción operacional basada en el desempeño.

Resulta interesante notar que hace quince años, Niss (1993) ya resaltó los tres principios básicos transversales con los que hemos iniciado este capítulo: la contextualización, la globalización y la personalización de la práctica matemática. Según este autor, el trabajo por competencias permite:

- Aportar información a los profesores y a los autores de textos didácticos para que controlen mejor los contextos en los cuales conviene situar las prácticas de enseñanza de contenidos matemáticos (contextualización de la enseñanza de las matemáticas).
- Evaluar conocimientos, intuiciones, habilidades y destrezas relacionadas con el entendimiento y dominio de las matemáticas como un todo y

en sus aspectos más fundamentales (globalización dentro de las matemáticas).
– Tener acceso a los procesos individuales de los estudiantes por medio del conocimiento de su desarrollo como pensadores matemáticos y sus potencialidades (personalización del aprendizaje matemático).

Por una parte, Niss habla de la actividad matemática como un conjunto de hechos, algoritmos, técnicas, estructuras conceptuales y estrategias, mientras que, por otra parte, se refiere a competencias de globalización, contextualización y personalización de la actividad matemática. Estas competencias se desarrollan por medio de la construcción de contenidos matemáticos (definiciones, teoremas, métodos de demostración, heurísticas de resolución de problemas, etc.), pero a su vez estos contenidos no pueden pensarse aislados del establecimiento de relaciones entre ellos (globalización dentro de las matemáticas), de los contextos en los cuales aparecen (contextualización) ni de las personas que se los plantean (personalización).

En la Tabla 5.1., recogemos las principales competencias matemáticas formuladas por Niss (1993) y las relacionamos con las competencias destacadas en el Cuadro 5.1. Las competencias heurística, de resolución de problemas y comunicativa están principalmente relacionadas con el desarrollo del principio de pensamiento crítico caracterizado en este libro (problematización de textos y prácticas matemáticas en los contextos donde se plantean). La competencia de modelización está muy ligada al principio de juego (establecimiento de normas y esquemas para llevar a cabo prácticas matemáticas en situaciones complejas). La competencia de visualización está especialmente relacionada con el principio de manipulación (uso de objetos mediadores con entidad física en la construcción de conocimiento matemático). Por último, el principio de atención a la diversidad (diversificación de formas de entender, aplicar, representar y comunicar contenidos matemáticos) aparece vinculado a una interpretación amplia de los procesos de desarrollo de todas las competencias anteriores. A su vez, estas competencias y principios admiten una mirada transversal dada por los tres principios más generales de globalización, contextualización y personalización.

Hay un principio del que no hemos hablado explícitamente a lo largo de estas páginas y que, sin embargo, está presente en todas ellas. Nos referimos al principio de la acción. La acción resuelve la falsa dicotomía entre saber qué y saber cómo, poniendo límites a una mejor eficacia práctica en el uso de contenidos matemáticos y orientando una mejor comprensión cognitiva de estos contenidos. Para llevar a cabo acciones, necesitamos saber hasta donde podemos globalizar, contextualizar y personalizar contenidos que están sujetos a normas de la disciplina matemática, pero sobre todo necesitamos haber sido capaces previamente de orientar la reflexión hacia la acción.

Competencias matemáticas (Niss, 1993)	Competencias matemáticas (Cuadro 5.1.)
Competencia de visualización Capacidad de interpretar elementos del espacio y representaciones de estos elementos dentro de representaciones del espacio.	• Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático representado por medio de lenguaje visual. • Relacionar hechos matemáticos y estructuras conceptuales básicas con propiedades del plano y del espacio.
Competencia heurística Capacidad de formular conjeturas y validarlas o refutarlas por medio del dominio de contenidos matemáticos.	• Realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar, argumentar decisiones y elegir procesos para aprender a razonar. • Utilizar técnicas matemáticas básicas (contar, localizar, medir, diseñar, regular, razonar, etc.) e instrumentos básicos (calculadora, ordenador, etc.) para hacer matemáticas.
Competencia de resolución de problemas Capacidad de identificar situaciones complejas en cuya comprensión y resolución intervienen contenidos matemáticos.	• Diferenciar situaciones problemáticas complejas de tareas rutinarias donde se reproducen situaciones desproblematizadas. • Trabajar la comprensión de enunciados, la búsqueda de técnicas y estrategias y verbalizar procesos y resultados para aprender a resolver problemas.
Competencia de modelización Capacidad de abstraer y esquematizar contenidos matemáticos desarrollados en contextos matemáticos y extramatemáticos.	• Construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones diversas en las que estos conocimientos se sugieran con sentido. • Experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones para aprender a pensar matemáticamente.
Competencia comunicativa Capacidad de expresar con claridad y precisión contenidos matemáticos en lenguajes verbales y simbólicos apropiados.	• Representar e interpretar procesos y resultados matemáticos a través de palabras, dibujos, materiales, símbolos, etc. • Comunicar oralmente y por escrito tareas matemáticas usando de manera progresiva y apropiada el lenguaje matemático.

Tabla 5.1. *Adaptación de las competencias matemáticas formuladas por Niss (1993)*

Epílogo

«No podemos aprender gran cosa de nosotros mismos contemplando nuestro pasado evolutivo —cinco millones de años de historia— que no pudiéramos aprender observando nuestro comportamiento de hoy, a menudo estrafalario».

IAN TATTERSALL (1998: 213)

CON ESTE LIBRO hemos querido ofrecer elementos para repensar la educación matemática. El trabajo del pensamiento crítico, de la manipulación y del juego, junto con la atención a la diversidad, han sido los ejes de nuestro discurso. La perspectiva escogida, basada en cuatro ejes y en su aplicación práctica por medio de actividades, se justifica por la actualidad de los temas —pensamiento crítico y atención a la diversidad— y la necesidad de revisión —manipulación y juego—. Somos conscientes de la exclusión de temas igualmente importantes. No hemos prestado atención, por ejemplo, a temas como la interdisciplinariedad o las nuevas tecnologías. Unas veces, el libro está limitado por los datos de que disponemos y, otras, por la omisión deliberada de temas que dejamos para otras ocasiones.

Sin implicación en las actividades propuestas, difícilmente se habrá producido la comprensión que deseábamos. Hemos querido mostrar que existe más de un modo alternativo de comprender una misma cuestión o de abordar una tarea aparentemente sencilla. En otras palabras, hemos querido transmitir que no hay una sola manera de comprender, ni siquiera en matemáticas. Éste es tal vez el aprendizaje más esperado por nuestra parte. Se trata de un aprendizaje no basado en contenidos específicos de matemáticas, sino más bien en la disposición de ver el mundo desde su complejidad. Es todo un desafío, sin duda, provocar cambios en la disposición del lector a ver las preguntas matemáticas como tareas de respuesta única.

Hemos querido transmitir que la comprensión no es una cuestión de todo o nada. Las tareas matemáticas siempre son complejas; incluso el ejercicio más sencillo admite una lectura compleja. En general, una respuesta rápida es síntoma de una falta de profundización y de una comprensión bastante incompleta. Esta comprensión puede completarse algo más con el mero hecho de

dedicar más tiempo a la tarea y compartirla con otras personas también dispuestas a dedicar tiempo a la reflexión. Cualquier persona siempre sabe mucho más cuando contrasta sus perspectivas con las de los otros y dedica tiempo suficiente a ello.

Los cuatro ejes temáticos (pensamiento crítico, manipulación, juego y atención a la diversidad) se han tratado desde la confianza en su utilidad social, ética y personal. Estamos en un país donde, a pesar de la universalidad de la enseñanza obligatoria, una parte importante de los alumnos deja la escuela a los dieciséis años. La intuición, avalada por la experiencia como profesores, nos lleva a pensar que el contacto de los jóvenes con las matemáticas escolares tiene que ver con la decisión de interrumpir la enseñanza formal. Aunque el contexto de la enseñanza formal viene dado por un conjunto muy variado de condiciones como la financiación, las políticas de formación permanente del profesorado, el propio acceso a la escuela o el entorno familiar, no se puede despreciar la influencia de la matemática escolar en la construcción de historias de fracaso y absentismo escolar.

Quienes dicen que no les gustan las matemáticas, en realidad deberían decir que no les gustan los contextos de la enseñanza de las matemáticas de los cuales han formado parte. Son apreciaciones diferentes. Por otra parte, hablar del contexto de la enseñanza es mucho más que hablar de los profesores, que son un elemento de entre muchos. Pensar que el rechazo a las matemáticas está siempre relacionado con el profesorado que se ha tenido es sobredimensionar el papel de los educadores. La cotidianidad de las clases recae en manos de los profesores, pero hay inercias que condicionan su toma de decisiones. Por ejemplo, en un centro de Secundaria es difícil que un profesor de matemáticas reciba apoyos si organiza las clases por medio del juego y la manipulación. Es de esperar que familias y equipos docentes del centro se muestren preocupados ante un planteamiento excesivamente «lúdico» en una etapa pensada desde enfoques más «académicos».

Con este libro hemos querido crear un contexto de enseñanza diferente. El juego y la manipulación se plantean para todas las edades. El pensamiento crítico es una práctica de resolución de problemas reales. Y la atención a la diversidad es una oportunidad de aprendizaje por contraste. Son páginas pensadas para ser leídas fuera de las aulas, en el espacio y el contexto que cada lector considere más oportunos. Sólo pedimos pausas para la reflexión y, sobre todo, vincular la lectura con las experiencias de cada uno. Éste también es un contexto de enseñanza diferente. El lector es aprendiz y, al mismo tiempo, maestro de su aprendizaje. Se trata de una apuesta pedagógica, alejada de currículos oficiales, de contextos formales y de autoridades indiscutibles. La educación matemática es mucho más que un fenómeno de aula. Incluso durante nuestra época de estudiantes, pasamos proporcionalmente la mayor parte del tiempo fuera del aula.

Conviene reflexionar sobre qué tipo de relación tenemos o hemos tenido con la educación matemática no formal. Asociar la educación matemática sólo

al entorno escolar y, aquí dentro, asociarla a la pizarra y al libro de texto es verla en blanco y negro. No es fácil repensarla en colores. Se puede incluso argumentar la idoneidad del blanco y negro. Muchos de nosotros preferimos continuar viendo *Casablanca* en blanco y negro, aunque últimamente se hayan hecho versiones coloreadas. No obstante, resulta difícil imaginar a alguien que continúe prefiriendo la educación matemática en blanco y negro después de haberla experimentado en colores. Los libros, las fotocopias de libros, las fichas de unidades didácticas y las fotografías de materiales tienen que ir acompañados de discusiones, juegos, materiales, intercambio y, en general, de enriquecimiento personal, cultural e intelectual.

Una educación matemática en color ha de promover intercambios y relaciones personales. Este libro ha querido facilitar procesos de relación con los otros. Esperamos haber conseguido que el lector haya ido a buscar amigos, compañeros y familiares para pensar en compañía. Una buena educación matemática es un espacio de intercambio. No se trata sólo de establecer interacción entre autores y lector. También hace falta que el lector sienta la necesidad de contrastar sus puntos de vista y las formas de aproximación a las diferentes actividades. Nos damos por satisfechos si se ha producido algún intercambio en este sentido.

También nos damos por satisfechos si hemos conseguido comunicarnos. La educación matemática es un servicio básico que tiene que ser distribuido bajo principios de igualdad y equidad entre toda la población. En particular, se necesitan textos que hablen de una manera comprensible e inclusiva. Decíamos al inicio del libro que pretendíamos ser comprensibles e inclusivos. Los criterios que han orientado nuestros contenidos se han establecido, por lo tanto, en base a la idea de servicio básico. El hecho de que cualquier lector tenga acceso al libro en una tienda próxima garantiza una primera condición de igualdad. Pero lo que verdaderamente importa es el acceso a las propuestas que se formulan. La igualdad de oportunidades en cuanto a la comprensión y la implicación es mucho más compleja y, en gran medida, depende de cómo hayamos concretado nuestras ideas, de cómo nos hayamos comunicado con el lector.

Decir que nuestro libro ha nacido con la intención de plantear prácticas educativas que promuevan la igualdad de oportunidades es, seguramente, pretencioso. Aun así, conviene empezar a hablar de la igualdad de oportunidades en contextos concretos de enseñanza, más allá de prácticas políticas y escolares más generales. Abundan los debates sobre la influencia de las políticas educativas y de las formas de organización y gestión de los centros escolares en la distribución de oportunidades de aprendizaje. Estos debates deberían producirse simultáneamente y coordinados con debates sobre el currículo y las oportunidades de aprendizaje. En el caso de las matemáticas, urge una reflexión profunda sobre cómo una cierta visión de la matemática escolar puede llegar a excluir grupos de alumnos, con las correspondientes consecuencias para su formación como ciudadanos y para la sociedad en general.

La segmentación de la matemática en temáticas concretas —álgebra, aritmética, estadística, probabilidad, geometría, etc.—, la homogeneización cultural en los procesos de resolución de problemas, la reducción del juego y la manipulación en las primeras edades o la predominancia de rutinas por delante de actividades de descubrimiento son condiciones de una educación matemática habitual pero no por ello válida. A lo largo del libro, hemos dicho por qué queremos construir una educación matemática de calidad. Nuestro deseo no es sólo pensando en las matemáticas. La dimensión social del problema del fracaso escolar y la construcción de una ciudadanía poco crítica indican que estamos ante una cuestión de primer orden.

También nos guiamos por una dimensión ética. El filósofo Ulrick Beck, opositor de la tesis de las dos culturas, explica la necesidad de superar la separación actual entre una cultura matemático-científica y una humanística-social. Esta separación se ha usado para contraponer la dimensión ética de la cultura humanística-social con la supuesta condición de objetividad de las culturas matemáticas, científicas y tecnológicas. Estamos de acuerdo con Beck cuando dice que toda cultura se enfrenta al desafío ético. La cultura de un aula de matemáticas no es neutra desde un punto de vista ético. Cuando basamos la educación matemática en el trabajo individual y la competitividad, estamos favoreciendo un perfil de aprendiz que se siente cómodo en una cultura de este tipo. El resto de aprendices se encuentran en situación de desigualdad.

Reconocer la necesidad de una educación matemática fuera de los entornos formales y asumir la urgencia de diversificar las metodologías de enseñanza dentro de estos entornos no son aspectos que lleven a una mejora automática de la relación entre las matemáticas y las personas. Sin embargo, no se trata de buscar mejoras automáticas, sino de avanzar en el establecimiento de relaciones sólidas. En este sentido, los cambios más importantes que se necesitan no son materiales; no consisten en ofrecer nuevos libros, como éste, o infraestructuras físicas más adecuadas —con laboratorios, aulas de recursos, etc.—. Hay que emprender debates y prácticas a fin de que todo el mundo sienta la necesidad de repensar su relación con las matemáticas. Con el fin de repensar la educación matemática, cada uno tiene que repensar primero la imagen que ha interiorizado de sí mismo como aprendiz de matemáticas. Democratizar la educación matemática pasa por que muchas personas cuestionen las representaciones que tienen de ellas mismas.

Hay que ayudar a poner en duda que «no se sirve para las matemáticas», que «se es de letras». Se trata de pasar del imaginario colectivo al terreno personal. Éste es un terreno mucho más complejo, lleno de representaciones sobre uno mismo que se han ido elaborando después de años de experiencias. ¿Cuántos de los lectores potenciales de este libro habrán desistido de comprarlo o leerlo porque entienden que las matemáticas son un tema pesado que quieren olvidar? Hay tantas personas en esta situación que podemos hablar de un fenómeno colectivo. Por este motivo, cerramos el epílogo y el libro con este tema.

En estos últimos párrafos no pretendemos hablar de aspectos de las trayectorias vitales de las personas que influyen en su relación con el mundo de las matemáticas. Cada trayectoria vital es diferente y cada persona llega a unas representaciones sobre sí misma por caminos distintos. Queremos hacer algunas reflexiones sobre la necesidad de construir escenarios emocionales positivos unidos a las experiencias de educación matemática de las personas. Hay quien habla de la vivencia extendida de «matefobia», un término extraño que sirve para definir la situación de muchos alumnos en las aulas y que, más tarde, expresa la distancia de muchos adultos con la educación matemática.

El aprendizaje de las matemáticas tiene que ser estimulante, divertido, interesante... no puede ser un cúmulo de situaciones adversas que pongan continuamente a prueba la capacidad de resistencia del aprendiz. Hay personas que tienen una gran confianza en ellas mismas a la hora de proponerse la superación de situaciones adversas. Pero incluso estas personas acostumbran a acabar agotadas ante el exceso de dificultades y obstáculos. Aunque el agotamiento es una situación personal, ligada a circunstancias personales, siempre hay causas externas que contribuyen a provocar o impedir su aparición.

Cuando se tiene muy claro que se quiere ser ingeniera, por ejemplo, puede ser más fácil aceptar una educación matemática poco estimulante, poco divertida y poco interesante. Los proyectos de futuro acostumbran a ser un aliciente para aceptar con buena cara situaciones adversas. Igualmente, cuando se vive en un entorno familiar donde se da mucha importancia a la educación matemática, aunque sea poco estimulante, poco divertida y poco interesante, también se acostumbran a desarrollar mecanismos internos con el fin de aceptar situaciones adversas. Los proyectos de futuro y los entornos familiares, junto con otras circunstancias, hacen que haya personas que tarden mucho en agotarse o que simplemente no se agoten tanto ante situaciones «potencialmente agotadoras». Aún así, la construcción de escenarios emocionales positivos tendría que depender de las condiciones de la educación matemática y no de cuestiones auxiliares como los proyectos de futuro o el entorno familiar.

Es legítimo que la persona que se aburre aprendiendo matemáticas de una cierta manera, quiera continuar aprendiendo en estas condiciones porque considera los resultados en matemáticas como un medio para llegar a un fin profesional. Es legítimo, pero sería bueno plantearse el cumplimiento de aspiraciones profesionales en otras condiciones. Este libro tendría que haber ayudado a plantear algunas de estas cuestiones. Querer ser ingeniera no es un motivo que lleve a aceptar la reducción de la matemática a rutinas. Igualmente, querer ser carpintero, por ejemplo, no tiene que servir para justificar la ausencia de matemáticas en la formación profesional. La educación matemática de calidad es un servicio básico, una necesidad de todo el mundo, de la misma manera que todo el mundo, tanto la ingeniera como el carpintero, necesitan una atención sanitaria de calidad o una vivienda digna.

Acabamos apelando al papel de cada persona en la reconstrucción de su relación con las matemáticas. Nuestra sociedad tiene la obligación de ofrecer una educación matemática de calidad para todo el mundo y cada uno de nosotros tiene la obligación de exigirla. Los derechos a veces deben exigirse. No basta con conformarse y contener emociones negativas como si fueran una condición ineludible de la educación matemática. Toda educación tiene que ser en beneficio de nuestra autoestima. Cuando decimos de alguien que su vida será mejor porque ha recibido una educación matemática de calidad, no estamos diciendo que alcanzará un lugar profesional de más prestigio o que se situará en una buena posición académica. La vida de esta persona ha de ser mejor porque se le han proporcionado herramientas para construir una imagen mejor de sí misma: la imagen de alguien capaz de pensar críticamente, observar las posibilidades del entorno, aprender jugando y prestar atención a la riqueza de la diversidad.

Referencias bibliográficas

ALSINA, À. (2006). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos* (2ª ed.). Madrid: Narcea.

— (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Octaedro-EUMO.

— (2007). «El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: Un análisis desde la didáctica de la matemática». *Educación Matemática*, *19*(1), 99-126.

— y PLANAS, N. (2007). «Cambio de perspectiva en la resolución de problemas a través del aprendizaje reflexivo». En T. Colén y F. Imbernon (coord.), *Actas del I Congreso Internacional sobre Nuevas Tendencias en la Formación Permanente del Profesorado* (pp. 354-362). Barcelona: Universidad de Barcelona.

ALSINA, C. (2008). *Vitaminas matemáticas*. Barcelona: Ariel.

—, BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. Mª. (1987). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

ANTUNES, C. (2006). *Juegos para estimular las inteligencias múltiples* (2ª ed.). Madrid: Narcea.

AUBANELL, A. (2006). «Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària». En http://phobos.xtec.es/sgfprp/resum.php?codi=1005

BARNETT, R. (2001). *Los límites de la competencia*. Barcelona: Gedisa.

BECHER, T. (2001). *Tribus y territorios académicos: La indagación intelectual y las culturas de las disciplinas*. Barcelona: Gedisa.

BETTELHEIM, B. (1994). *No hay padres perfectos.* Barcelona: Crítica.

BISHOP, A. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company (Trad. esp.: (1999) *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Paidós).

BLÁZQUEZ, F., DARNACULLETA, A., FIGUERAS, R., FRANQUET, J. C., MIGUEL, A. y PLANAS, N. (2006). «El pensament crític a l'aula de matemàtiques». *Perspectiva Escolar, 308*, 64-72.

BÖHM, W. (1995). *Teoría y práctica: El problema básico de la pedagogía*. Madrid: Dykinson.

BRUNER, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid: Morata.

CALVO, X.; CARBÓ, C.; FARELL, M.; FORTUNY, J. M. y otros (coord.) (2002*). La Geometría: De las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. Barcelona: Graó.

CHAMOSO, J. M., GRAÑA, B., RODRÍGUEZ, M. y ZÁRATE, J. (2004). *Matemáticas desde la prensa*. Madrid: Nivola.

COMISIÓN EUROPEA (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Bruselas: Comisión Europea.

DARNACULLETA, A.; ESTEVE, S.; PLANAS, N. (2008). «Els problemes de «context real» a l'aula de matemàtiques». *Perspectiva Escolar*.

DECROLY, O. (1965). *Iniciación general al método Decroly y ensayo de aplicación a la escuela primaria*. Buenos Aires: Losada.

DEULOFEU, J. (2004). *Una recreación matemática: Historias, juegos y problemas*. Barcelona: Planeta.

DEWEY, J. (1933). *How we think*. Boston: D. C. Heath.

— (1985). *Democràcia i escola*. Vic: Eumo.

DIENES, Z. P. (1970). *Iniciación a lógica y conjuntos*. Barcelona: Teide.

DOWNS, S. y PERRY, P. (1987). *Developing skilled learners*. Londres, Reino Unido: DfEE.

ESTALELLA, J. (1918). *Ciencia Recreativa*. Barcelona: Gustavo Gili.

— (2007). *Ciència Recreativa Comentada.* Barcelona: Ajuntament de Barcelona (reedición comentada de la obra de 1918).

EURYDICE (2004). *La integración escolar de alumnado inmigrante en Europa.* Madrid: Dirección General de Educación y Cultura.

FEITO, R. (2002). *Una educación de calidad para todos*. Madrid: Siglo XXI.

FENNEMA, E. H. (1972). «Models and Mathematics». *Arithmetic Teacher, 18*, 635-640.

FIGUERAS, R., PLANAS, N.; BLÁZQUEZ, F. y DARNACULLETA, A. (2007). «De las opiniones a los argumentos». *Cuadernos de Pedagogía, 373*, 37-41.

FLECHA, R. y PUIGVERT, L. (2002). «Las comunidades de aprendizaje: Una apuesta por la igualdad educativa». *Revista de Estudios y Experiencias en Educación, 1*(1), 11-20.

FOUREZ, G. (2008). *Cómo se elabora el conocimiento: La epistemología desde un enfoque socioconstructivista*. Madrid: Narcea.

FREINET, C. (1968). *Essai de psychologie sensible appliquée à l'éducation*. Neuchâtel: Delachaux et Niestle.

FREIRE, P. (1993). *Pedagogía de la esperanza*. Madrid: Siglo XXI.

FREUDHENTAL, H. (1967). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Guadarrama.

— (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

FRÖBEL, F. (1989). *L'educació de l'home i el jardí d'infants*. Vic: Eumo (reedición de la obra de 1826).

GALEANO, E. (1999). *Patas arriba. La escuela del mundo al revés*. Madrid: Siglo XXI.

GALÍ, A. (1984). *La mesura objectiva del treball escolar*. Vic: Eumo Editorial y Diputación de Barcelona (reedición de la obra de 1928).

GEERTZ, C. (1994). *Conocimiento local*. Barcelona: Paidós.

GIMÉNEZ, J., SANTOS, L. y PONTE, J. P. (coord.). (2004). *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes*. Barcelona: Graó.

GOODLAD, J. (1984). *A place called school*. Nueva York: McGraw Hill.

GOODMAN, P. (1964). *Compulsory mis-education*. Nueva York: Horizon Press.

GRUPO EMAC (2008). *El treball del pensament crític a l'educació matemàtica*. Barcelona: Associació de Mestres de Rosa Sensat.

GRUPO VILATZARA (2006). *Viaje y matemáticas: Un paseo por el mundo y las matemáticas*. Badajoz: FESPM-ICE UAB.

GUZMÁN, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*, en http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm.

— (1989). «Juegos y matemáticas». *SUMA, 4*, 61-64.

HANDKE, P. (1981). *El peso del mundo.* Barcelona: Laia.

HELLER, A. (1997). *Sociología de la vida cotidiana.* Barcelona: Península.

HEUVEL-PANHUIZEN, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Freudhental Institute.

HUIZINGA, J. (1989). *Homo ludens*. Madrid: Alianza (reedición de la obra de 1938).

IRURZUN, L. E. (2000). *Evaluación educativa orientada a la calidad*. Buenos Aires: FUNDEC.

MAKARENKO, A. S. (1955). *Bandiere sulle torri*. Roma: Edizioni di Cultura Sociale.

MARCHESI, A. y HERNÁNDEZ, C. (coord.) (2003). *El fracaso escolar: Una perspectiva internacional*. Madrid: Alianza Editorial.

— y PÉREZ, E. M. (2004). *La situación profesional de los docentes*. Madrid: CIE-FUHEM.

MIALARET, G. (1986). *Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan. Un texto base para psicólogos, enseñantes y padres*. Madrid: Visor.

MONTESSORI, M. (1964). *L'enfant*. Génova: Monthier.

MORIN, E. (2000a). *La mente bien ordenada*. Barcelona: Seix Barral.

— (2000b). *Els set coneixements necessaris per a l'educació del futur*. Barcelona: Centre UNESCO de Catalunya.

— (2001). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* Barcelona: Paidós.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

— (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Thales.

NISS, M. (coord.) (1993). *Cases of assessment in mathematics education: An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

OLIVÉ, L. (2000). *Multiculturalismo y pluralismo*. Barcelona: Paidós.

ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO (2001). *Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000*. París: OCDE.

— (2006). *Le rôle crucial des enseignants: Attirer, former et retenir des enseignants de qualité*. París: OCDE.

— (2006). *Assessing scientific, reading and mathematical literacy: A framework for PISA 2006*. París: OCDE.

— (2007). «Definition and Selection of Competencies (DeSeCo)», en https://www.oecd.org.

ORTEGA, T. (2005). *Conexiones matemáticas: motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: Graó.

PIAGET, J. (1982). *Juego y desarrollo.* Barcelona: Grijalbo.

— y INHELDER, B. (1975). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

PÉREZ-GÓMEZ, R. (coord.) (2001). *Construir las matemáticas*. Granada: Proyecto Sur.

PLANAS, N. (2003). «Medidas de apoyo pedagógico, didáctico y organizativo ante el fenómeno de fracaso matemático escolar en alumnos minoritarios». *SUMA, 42*, 23-36.

— (2005). «El papel del discurso en la construcción del Discurso de la práctica matemática». *Cultura y Educación, 17*(1), 19-34.

— (2006). «La práctica matemática en su contexto cultural». En J. M. Chamoso (coord.), *Enfoques actuales en didáctica de la matemática* (pp. 131-155). Madrid: Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

— y ALSINA, À. (2006). «Argumentos para los futuros maestros en torno al conocimiento matemático». *UNO-Revista de Didáctica de la Matemática, 42*, 46-57.

— y ALSINA, À. (2007). «Formación sobre diversidad cultural y educación matemática en situaciones de práctica reflexiva». En T. Colén y F. Imbernon (coord.), *Actas del I Congreso Internacional sobre Nuevas Tendencias en la Formación Permanente del Profesorado* (pp. 377-390). Barcelona: Universidad de Barcelona.

— y CIVIL, M. (2007). «Reconstrucción de creencias, prácticas e identidades en la educación matemática de alumnos inmigrantes». En J. Giménez y otros (coord.), *Educación matemática y exclusión* (pp. 131-145). Barcelona: Graó.

PLANAS, N., MIGUEL, A., FRANQUET, J. C., FIGUERAS, R., DARNACULLETA, A. y BLÁZQUEZ, F. (2008). «Una experiència d'educació matemàtica crítica». *Guix-Elements d'Innovació Educativa, 343*, 29-36.

POWELL, A. B. y FRANKENSTEIN, M. (1999). *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*. Nueva York: SUNY Press.

PUIG-ADAM, P. (1956). *Didáctica matemática heurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

SALA, T. (2001). *Crónica de un profesor en secundaria. El mundo de la enseñanza desde dentro*. Barcelona: Península.

SÁNCHEZ, C. y CASAS, L. M. (1998). *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas*. Madrid: MEC.

SANROMÁN, T. (1997). *La diferencia inquietante: Viejas y nuevas estrategias culturales de los gitanos*. Madrid: Siglo XXI.

SARAMAGO, J. (2000). *La caverna*. Madrid: Santillana.

SKOVSMOSE, O. (1994). *Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SPENCER, H. (1989). *L'educació intel·lectual, moral i física*. Vic: Eumo Editorial (traducción de la obra inglesa de 1861).

TATTERSALL, I. (1998). *Hacerse humano*. Barcelona: Ediciones 62.

UNAMUNO, V. (2003). *Lengua, escuela y diversidad sociocultural*. Barcelona: Graó.

ORGANIZACIÓN DE LAS NACIONES UNIDAS PARA LA EDUCACIÓN, LA CIENCIA Y LA CULTURA (1997a). *The Hamburg Declaration: The Agenda for the Future*. Hamburgo: UNESCO-Institute of Education.

— (1997b). *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos*. Río de Janeiro: UNESCO-Santiago.

VILA, A. y CALLEJO, M. L. (2005). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas* (2ª ed.). Madrid: Narcea.

VILELLA, X. (2007). *Matemáticas para todos: Enseñar en un aula multicultural*. Barcelona: Horsori-ICE UB.

VYGOTSKI, L. S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo (reedición de la obra de 1930).

WINNICOT, D. W. (1993). *Realidad y juego*. Barcelona: Gedisa (reedición de la obra de 1971).

Colección
EDUCACIÓN HOY ESTUDIOS

AEBLI, H.: *12 formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología.*
– *Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo.*
AINSCOW, M.: *Necesidades especiales en el aula. Guía para la formación del profesorado.*
– *Desarrollo de escuelas inclusivas. Ideas, propuestas y experiencias para mejorar las instituciones escolares.*
AINSCOW, M., HOPKINS, D., SOUTHWORTH, G. y WEST, M.. *Hacia escuelas eficaces para todos. Manual para la formación de equipos docentes.*
AINSCOW, M., BERESFORD, J., HARRIS, A., HOPKINS, D. y WEST, M.: *Crear condiciones para la mejora del trabajo en el aula. Manual para la formación del profesorado.*
ALSINA, À. y PLANAS, N.: *Matemática Inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible.*
ARIZA, C., CESARI, M.ª D. y GABRIEL Y GALÁN, M.: *Programa integrado de Pedagogía Sexual en la escuela.*
ASSMANN, H.: *Placer y ternura en la Educación. Hacia una sociedad aprendiente.* Prólogo de Leonardo Boff.

BARTOLOMÉ, M. (coord.): *Identidad y Ciudadanía. Un reto a la educación intercultural.*
BAZARRA, L., CASANOVA, O., G.ª UGARTE, J.: *Profesores, alumnos, familias. 7 pasos para un nuevo modelo de escuela.*
BERNAD, J. A.: *Modelo cognitivo de evaluación escolar.*
BERNARDO, J.: *Cómo personalizar la educación. Un reto de futuro.*
BISQUERRA, R.: *Orígenes y desarrollo de la Orientación Psicopedagógica.*
BRUNER, J. S.: *El proceso mental en el aprendizaje.*

DAY, Ch.: *Formar docentes.*

ECHEITA, G.: *Educación para la inclusión o educación sin exclusiones.*

FERMOSO, P.: *Manual de la Economía de la Educación.*
FOUREZ, G.: *La construcción del conocimiento científico. Sociología y ética de la ciencia.*
– *Cómo se elabora el conocimiento. La epistemología desde un enfoque socioconstructivista.*

GARCÍA SÁNCHEZ, J. N.: *Manual de dificultades de aprendizaje.*
GERVILLA, A.: *Didáctica de la Educación Infantil.*
– *Familia y Educación familiar. Conceptos clave, situación actual y valores.*
GERVILLA, E.: *Educación familiar. Nuevas relaciones humanas y humanizadoras.*
GÓMEZ-CHACÓN, I.: *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje.*
GUPTA, R. M. y COXHEAD, P.: *Asesoramiento y apoyo psicopedagógico. Estrategias prácticas de intervención educativa.*
GUTIÉRREZ ZULOAGA, I.: *Introducción a la historia de la Logopedia.*

HERSH, R., REIMER, J. y PAOLITTO, D.: *El crecimiento moral. De Piaget a Kohlberg.*
HOUGH, M.: *Técnicas de orientación psicológica.*
HUSÉN, T.: *La escuela a debate. Problemas y futuro.*

JENSEN, E.: *Cerebro y aprendizaje.*

KEOGH, B. K.: *Temperamento y rendimiento escolar.*
KLENOWSKI, V.: *Desarrollo de Portafolios para el aprendizaje y la evaluación.*

LONGÁS, J. y MOLLÁ, N.: *La escuela orientadora. La acción tutorial desde una perspectiva institucional.*
LLOPIS, C. (coord.): *Recursos para una educación global. ¿Es posible otro mundo?*

MARDOMINGO, M.ª Jesús: *Psiquiatría para padres y educadores.*
MARTÍN, M.: *Semiología de la imagen y pedagogía.*
McCLELLAND, D.: *Estudio de la motivación humana.*
MEMBIELA, P. (ed.): *Enseñanza de las Ciencias desde la perspectiva CTS. Formación para la ciudadanía.*

PÉREZ JUSTE, R., LÓPEZ RUPÉREZ, F., PERALTA, M. D. y MUNICIO, P.: *Hacia una educación de calidad. Gestión, instrumentos y evaluación.*
PÉREZ SERRANO, G.: *Pedagogía social-Educación social. Construcción científica e intervención práctica.*

POEYDOMENGE, M. L.: *La educación según Rogers. Propuestas de la no directividad.*

POSTIC, M.: *La relación educativa. Factores institucionales, sociológicos y culturales.*

POSTIC, M. y DE KETELE, J. M.: *Observar las situaciones educativas.*

– *La relación educativa.*

POVEDA, L.: *Ser o no ser. Reflexión antropológica para un programa de pedagogía teatral.*

– *Texto dramático. La palabra en acción.*

RAY, W.: *Diferencias individuales en el aprendizaje. Personalidad y rendimiento escolar.*

RODRÍGUEZ, A., GUTIÉRREZ, I. y MEDINA, A.: *Un enfoque interdisciplinar en la formación de los maestros.*

ROSALES, C.: *Evaluar es reflexionar sobre la enseñanza.*

RUIZ, J. M.ª: *Cómo hacer una evaluación de centros educativos.*

SÁINZ, C. y ARGOS, J.: *Educación Infantil. Contenidos, procesos y experiencias.*

SCHWARTZ, B.: *Hacia otra escuela.*

STAINBACK, S. y W.: *Aulas inclusivas. Un nuevo modo de enfocar y vivir el currículo.*

TARDIF, M.: *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.*

TEJEDOR, F. J. y GARCÍA VALCÁRCEL, A. (eds.): *Perspectivas de las nuevas tecnologías en la educación.*

TENBRINK, T. D.: *Evaluación. Guía práctica para profesores.*

TITONE, R.: *Psicodidáctica.*

URÍA, M.ª E.: *Estrategias didáctico-organizativas para mejorar los centros educativos.*

VALLE, A. del: *Aportación bio-bibliográfica a la Historia de la Ciencia.*

VILA, A. y CALLEJO, M.ª L.: *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.*

WHITAKER, P.: *Cómo gestionar el cambio en contextos educativos.*

ZABALZA, M. A.: *Calidad en la Educación Infantil.*

– *Diseño y desarrollo curricular.*

– *Diarios de clase. Un instrumento de investigación y desarollo profesional.*



ÀNGEL ALSINA y NÚRIA PLANAS

MATEMÁTICA INCLUSIVA

Propuestas para una educación matemática accesible

Nuestra sociedad tiene la obligación de garantizar el acceso a una educación matemática de calidad para todo el mundo y, con ello, avanzar en la mejora de las condiciones de ciudadanía. *Matemática Inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible* pretende ser un instrumento de ayuda en la consecución de este objetivo.

A lo largo del libro se proponen formas de reconstruir la relación de las personas con las matemáticas a través de diversos principios fundamentales de la educación matemática: el *pensamiento crítico*, la *manipulación de materiales*, el *juego* y la *atención a la diversidad*.

Una educación matemática basada en estos principios tiene que destacar, a su vez, los principios más generales de contextualización en los lugares donde se llevan a cabo las prácticas: globalización de los grupos de conocimiento implicados y personalización de los contenidos matemáticos en función de la especificidad de cada persona. Unos y otros principios se abordan de forma interrelacionada y en base a experiencias validadas de aula.

Àngel Alsina i Pastells, doctor en Psicología por la Universidad Autónoma de Barcelona, es profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Facultad de Educación y Psicología de la Universidad de Gerona, donde compagina su actividad docente con su labor investigadora en el Grupo GAMAR -Gabinete de Materiales e Investigación para la Matemática en la escuela-, del que es responsable de investigación.

Núria Planas i Raig, licenciada en Ciencias Exactas por la Universidad de Barcelona, es doctora en Pedagogía por la Universidad Autónoma de Barcelona y profesora de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación de esta Universidad. Ha publicado numerosos artículos de investigación y de divulgación sobre educación matemática, inclusión social y pensamiento crítico.

Ambos autores han participado en diversos proyectos de investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas y han divulgado su pensamiento a través de la publicación de numerosos libros y artículos, y en múltiples actividades de formación permanente.

narcea

9 788427 715912